



**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА**

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Тихонов Н.А., Токмачев М.Г.

**Курс лекций
«ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»
Часть 1**

Москва, 2013

ТИХОНОВ Н.А., ТОКМАЧЕВ М.Г.

Основы математического моделирования / Учебное пособие.

М.: Физический факультет МГУ, 2013.

Пособие по курсу «основы математического моделирования» написано на основе курса лекций, читавшегося в течение ряда последних лет на физическом факультете МГУ.

В пособии рассматриваются вопросы и методы математического моделирования, а также постановки и решения ряда классических и активно изучаемых в последнее время задач математической физики.

Текст разбит на главы и параграфы. Нумерация формул и рисунков в каждом параграфе своя. Рисункам присвоены номера в тех случаях, когда на них имеются последующие ссылки. В остальных случаях рисунки иллюстрируют рядом расположенный текст и не пронумерованы.

Тихонов Николай Андреевич

Токмачев Михаил Геннадьевич

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова,
119991, Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, д.1, стр.2

© Физический факультет МГУ
им. М.В.Ломоносова, 2013

© Тихонов Н.А.,
Токмачев М.Г., 2013

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Некоторые классические задачи математической физики.	10
§1. Задача с данными на характеристиках (задача Гурса)	10
§2. Общая задача Коши для гиперболических уравнений.	13
Постановка общей задачи Коши.	13
Смысл функции Римана.	17
Уравнение с постоянными коэффициентами.	18
Задача Коши для уравнения колебаний.	19
Функция влияния точечного импульса.	21
§3. Перенос вещества в двухфазной среде. Динамика сорбции.	21
Постановка задачи.	21
Линейный случай.	26
Нелинейный случай.	27
§4. Метод подобия. Задача Стефана	29
Метод подобия	29
Задача Стефана (задача о фазовом переходе)	31
§5. Постановка задач с уравнением Гельмгольца в неограниченной области.	35
Условия излучения	37
Математическая задача дифракции.	41
Принцип предельного поглощения.	43
Принцип парциального излучения	46
§6. Математические модели жидких вязких сред.	51
Основные уравнения.	52
Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением.	55
Внешняя задача гидродинамики.	56
Распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении сферы.	57
Глава 2. Нелинейные процессы	61
§1. Квазилинейное уравнение переноса.	61
Линейное уравнение.	62
Квазилинейное уравнение.	64
Метод характеристик.	66
Разрывы решения.	68
§2. Нелинейное уравнение теплопроводности.	72
Уравнение Буссинеска. Задача о наводнении.	73
Нелинейная модель горения.	76
§3. Модель «Хищник-Жертва»	80

Введение

Пусть изучается некоторый физический процесс или явление. Математическое моделирование состоит в том, что законы, в соответствие с которыми происходит этот процесс, описываются некоторыми уравнениями, то есть составляется математическая модель. Далее исследуются решения, получаемые с помощью модели, и таким образом теоретически изучается рассматриваемое явление.

Такой подход не нов и используется еще со времен Ньютона, когда физика перестала быть частью философии и встала на твердую математическую основу. Однако, как известно, аналитически решаются в основном лишь линейные уравнения. Поэтому была возможность исследовать лишь простейшие процессы или простейшие оценочные приближения. Ситуация изменилась с появлением компьютерной техники в 20 веке. Появилась возможность численно решать нелинейные уравнения и системы уравнений большой сложности. А это в свою очередь позволили детально рассматривать процессы во всех подробностях. Сейчас математическое моделирование представляет собой широко используемый метод исследования во всех областях науки.

Компьютерный эксперимент обладает рядом преимуществ. Во-первых, он дешев; во-вторых, он позволяет рассматривать изучаемый процесс в различных режимах его проведения, что важно в многовариантном случае; в-третьих, имеется возможность оценивать эффект, вносимый различными физическими факторами в общий результат и т.д. Часто возникает ситуация, когда реальный эксперимент вообще невыполним и моделирование является единственным способом изучения процесса. (Например, исследование параметров черных дыр.)

При изучении физической задачи с помощью математического моделирования, обычно проходят через следующие этапы:

1. Формулировка модели.
2. Исследование математической задачи.

3. Поиск алгоритма решения (аналитического или численного).
4. Создание компьютерной программы.
5. Исследование результатов и сопоставление их с имеющимися данными.
6. Доработка модели.

В данном курсе рассматриваются некоторые из них – формулировка модели, ее математическое исследование и изучение алгоритмов решения.

Формулировка модели существенно зависит от специфики конкретной задачи – поэтому рассмотрим лишь некоторые понятия и терминологию.

I. Задачи бывают прямые и обратные.

А) Прямые – такие, которые изучались, например, в рамках курсов дифференциальных уравнений и методов математической физики. Задано уравнение и дополнительные условия и требуется найти его решение;

Б) Обратные – нахождение неизвестных характеристик модели по известному решению или известным его свойствам.

Обратные задачи бывают разного вида. Их условно можно разбить на группы:

1. Задачи обратные по самой постановке – например, задача поиска нефти. Требуется определить недоступные прямому наблюдению места расположения и объемы нефтяных пластов по проявлениям на поверхности земли: изменению гравитационной силы или отклику на электромагнитные возбуждения.
2. Задача определения функциональной структуры модели и значений ее параметров по опытным данным, как вспомогательный этап при решении прямой задачи. Пусть наша цель состоит в том, чтобы рассчитать прямой процесс. При этом часто заранее оптимальная структура модели однозначно не определена и значения части ее параметров неизвестны. Поэтому необходимо предварительно восстановить значения неизвестных параметров по имеющимся экспериментальным данным.

3. Задача синтеза или задача проектирования физической системы. Требуется так построить систему, чтобы иметь заданные характеристики на выходе. Например, выбрать последовательности нанесения отражающих слоев в задаче просветленной оптики или покрытия самолета-невидимки.

II. Модели могут формулироваться в разной форме.

1. Как система дифференциальных и/или интегральных уравнений с соответствующими дополнительными (начальными и граничными) условиями.

2. В виде вариационных задач. Вариационная задача и ее уравнения Эйлера находятся в соответствии. В курсе вариационного исчисления стремились от вариационной задачи перейти к дифференциальной. Часто, при использовании численных методов, удобнее наоборот – от систем дифференциальных уравнений переходить к вариационным задачам. Например, в сложной системе вместо решения множества уравнений Ньютона бывает удобнее составить функцию Лагранжа и использовать принцип наименьшего действия.

3. Модель, в которой процесс описывается некоторыми уравнениями, называется детерминированной. Если модель описывается некоторыми вероятностными законами, она называется стохастической.

Исследование модели может проводиться аналитическими, асимптотическими или численными методами. Изучение поведения решения с помощью численных методов – не обязательный, но часто встречающийся элемент исследования задач.

III. Иерархия моделей.

При моделировании любого процесса имеется иерархия моделей, описывающих процесс с различной степенью подробности путем учета различного количества физических факторов. Даже в простейшей задаче распространенного тепла можно рассматривать линейное уравнение с постоянными коэффициентами, а можно учитывать зависимость коэффициентов от температуры и конечную скорость распространения

тепла. Тем более, это актуально в многофакторных задачах. Например, в экологических задачах, задачах предсказания погоды и т.д.

Примером такой задачи является прогноз влажности на поле под сельскохозяйственной культурой. Все поле можно рассматривать как единое целое и писать соотношения баланса влаги для него. Можно почву разбить на слои и рассматривать баланс влаги в слоях – получим модель, представляющую собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Можно учитывать множество факторов связанных с растениями, например, изменение интенсивности испарения жидкости с листьев в зависимости от внешней температуры, влажности и интенсивности солнечной радиации и т.д. Получаем очень широкий спектр моделей, в той или иной мере отражающих происходящее.

В этих задачах выбор удачной модели становится не просто важным, а центральным вопросом моделирования. Не надо думать, что наилучшая модель – та, которая учитывает максимально возможное количество факторов. Это не так, – с усложнением модели увеличивается количество неизвестных параметров, которые необходимо определить на основе имеющегося ограниченного опытного материала. Обратная задача определения параметров становится неустойчивой. Попытки прогнозировать процесс с помощью такой модели в условиях отличных от тех, в которых определялись параметры, приводят к ошибочным результатам.

Сложность модели должна быть согласованна с объемом и точностью экспериментальных данных. В случае, когда в системе присутствуют несколько факторов одного порядка, все они должны быть или одновременно учтены в модели, или отброшены.

IV. Универсальность математических моделей.

Часто совсем разные естественнонаучные задачи приводят к сходным математическим моделям. Например, задача о диффузии вещества, задача теплопроводности и задача об уровне грунтовых вод описываются одинаковыми уравнениями. Исследовав одну математическую задачу, часто можно сделать выводы о решении и других физических задач. С другой

стороны, если Вы работаете с некоторой задачей, то ее решения целесообразно сравнивать с известными решениями других физических задач, приводящих к той же математической модели.

Немецкий химик Лотке рассматривал процесс автокаталитических реакций. Примером такой реакции может служить реакция $\text{CaO} + 2\text{HF} \xrightarrow{\text{H}_2\text{O}} \text{CaF}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$. В этой реакции для того, чтобы разорвать связь $\text{H}^+ - \text{F}^-$ нужно присутствие полярных молекул воды растягивающих ионы в разные стороны. Тем самым скорость реакции зависит от наличия молекул воды – продукта реакции. Такие реакции называются автокаталитическими.

Исследовав реакцию $A \xrightarrow{X} X \xrightarrow{Y} Y \longrightarrow B$ Лотке описал ее протекание уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = k_1 XA - k_2 YX \\ \frac{dY}{dt} = \bar{k}_2 YX - k_3 Y \end{cases}$$

Он показал, что в этой реакции происходит колебательный процесс, в котором концентрация компонентов X и Y периодически изменяется.

Позже, занимаясь экологической задачей, исследователь Вольтер предположил, что изменение популяции животных в системе «хищник-

жертва» описывается сходными уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = bxy - \gamma y \end{cases}$$

где x – численность потенциальных жертв, а y – хищников. Используя результаты Лотке Вольтер пришел к выводу, что колебательный процесс изменения численности популяции должен иметь место и в системе «хищник-жертва».

Из универсальности математических моделей следует универсальность результатов. Если несколько, разных по физической природе процессов описываются сходной математической моделью, то очевидно, что полученные с помощью этой модели результаты применимы ко всем этим процессам.

При постановке математической задачи, тем более, если в нее входят несколько уравнений и различные дополнительные условия, важно провести изучение математического обоснования ее постановки. Это включает в себя:

- исследование внутренней непротиворечивости (не слишком ли много условий мы наложили на решение), т.е. вопрос существования решения;
- выяснения вопроса единственности решения (не слишком ли мало дополнительных условий мы задали);
- выяснение вопроса устойчивости решения при изменении наложенных дополнительных условий.

Глава 1. Некоторые классические задачи математической физики.

§1. Задача с данными на характеристиках (задача Гурса)

Задачей Гурса называется задача гиперболического типа, в которой начальные условия заданы на характеристиках.

Ранее в курсе ММФ изучалась задача $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с начальными условиями, заданными при $t = 0$. Характеристиками этого уравнения являются прямые $x = \pm at$. Поэтому, начальные условия задавались не на характеристиках, и, следовательно, рассматривавшаяся задача не являлась задачей Гурса.

Рассмотрим простейшую задачу Гурса:

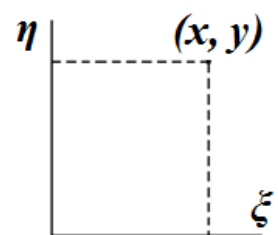
$$\begin{cases} u_{xy} = f(x, y), & x > 0, y > 0 \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) \\ u(0, y) = \varphi_2(y) \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \end{cases} \quad (1)$$

Проинтегрировав дважды исходное уравнение, получим решение этой задачи:

$$\int_0^x \int_0^y u_{\xi\eta} d\xi d\eta = u(x, y) - u(x, 0) - u(0, y) + u(0, 0),$$

Откуда

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2)$$



Рассмотрим общую задачу Гурса (в области $x > 0, y > 0$):

$$\begin{cases} u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) \\ u(0, y) = \varphi_2(y) \\ \varphi_1(0) = \varphi_2(0) \end{cases} \quad (3)$$

Здесь φ_1 и φ_2 , а также a, b, c и f - непрерывно-дифференцируемые функции. Перепишем уравнение (3) в следующем виде:

$$u_{xy} = f(x, y) - (a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u) \quad (4)$$

Рассматривая правую часть уравнения (4), как неоднородность в уравнении (1), получаем из (2) следующую формулу:

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^x \int_0^y [f(\xi, \eta) - a(\xi, \eta)u_\xi - b(\xi, \eta)u_\eta - c(\xi, \eta)u] d\xi d\eta \quad (5)$$

Сделав переобозначение

$$F(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

и дифференцируя (5) по x и по y , приходим к системе интегральных уравнений типа Вольтера

$$\begin{cases} u(x, y) = - \int_0^x \int_0^y [a(\xi, \eta)u_\xi + b(\xi, \eta)u_\eta + c(\xi, \eta)u] d\xi d\eta + F(x, y) \\ u_x(x, y) = - \int_0^y [a(x, \eta)u_\xi + b(x, \eta)u_\eta + c(x, \eta)u] d\eta + F_x(x, y) \\ u_y(x, y) = - \int_0^x [a(\xi, y)u_\xi + b(\xi, y)u_\eta + c(\xi, y)u] d\xi + F_y(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

относительно функций $u(x, y)$, $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$.

Как известно, уравнение Вольтера $z(x) = \int_0^x K(x, \xi) z(\xi) d\xi + f(x)$ может быть решено методом последовательных приближений. Для этого рассматривают рекуррентную последовательность z_n , удовлетворяющую условиям:

$$\begin{cases} z_{n+1} = Az_n + f \\ z_0 \equiv 0 \end{cases}, \quad (7)$$

где $Az_n = \int_0^x K(x, \xi) z_n(\xi) d\xi$. В курсе интегральных уравнений было доказано, что последовательность z_n равномерно сходится к некоторой функции z , которая будет являться решением рассматриваемого интегрального уравнения. Доказательство строится на последовательных оценках для разности $(z_{i+1} - z_i)$.

В нашем случае, вводя вектор-функции $U = \{u, u_x, u_y\}$ и $\Gamma = \{F, F_x, F_y\}$, систему уравнений (6) можно переписать в векторном виде:

$$U = AU + \Gamma, \quad (8)$$

где оператор A определяется правой частью (6). Аналогично случаю одного уравнения Вольтера, решение (8) может быть получено с помощью метода последовательных приближений. Вектор-функция U может быть найдена, как предел сходящейся последовательности U_n , определяемых из рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} U_{n+1} = AU_n + \Gamma \\ U_0 \equiv 0 \end{cases} \quad (9)$$

При этом $U_n \rightarrow U$ равномерно, т.е. каждая из компонент вектор-функции U_n равномерно сходится к соответствующей компоненте вектор-функции U . Решение (6) существует и единственно.

Метод доказательства этих утверждений такой же, как и для (7), однако в многомерном случае оценки сложнее. Более подробно их можно изучить в учебниках [1, 2].

Непосредственным дифференцированием первого из уравнений (6) по x и y легко проверить, что функция $u(x, y)$ - решение (6) удовлетворяет условиям (3). Следовательно, решение (3) существует. Решение задачи (3) единственно. Действительно, мы нигде не предполагали специального вида решения. Поэтому, для любого решения (3) можно провести преобразования, сделанные выше и прийти к системе уравнений (6), решение которой единственно.

§2. Общая задача Коши для гиперболических уравнений.

Постановка общей задачи Коши.

$$\begin{cases} Lu = u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \\ u|_C = \varphi(x, y) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_C = \psi(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

В этой задаче характеристиками уравнения будут прямые $x = const$ и $y = const$. На контур C наложим следующие условия:

- 1) C – гладкая кривая;
- 2) C – не является характеристикой;
- 3) Любая характеристика пересекает контур C один раз (Рис.1).

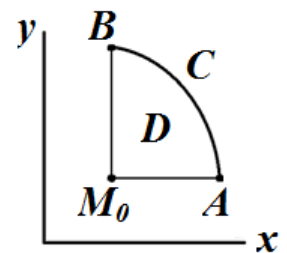


Рис.1

Оператор K вида

$$Kv = v_{xy} - (av)_x - (bv)_y + cv \quad (2)$$

называется сопряженным к оператору L .

$$\text{Нетрудно проверить, что } vLu - uKv = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \quad (3)$$

где

$$\begin{cases} P = uv_x - vu_x - 2buv \\ Q = vu_y - uv_y + 2a uv \end{cases} \quad (4)$$

Проинтегрировав уравнение (3) по области D , и используя формулу Грина, получим:

$$\begin{aligned} \int_D (vLu - uKv) dx dy &= \frac{1}{2} \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (Qdy + Pdx) = \\ &= \frac{1}{2} \int_{M_0}^A Pdx + \frac{1}{2} \int_B^{M_0} Qdy + \frac{1}{2} \int_{AB} (Qdy + Pdx) \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим по отдельности интегралы, входящие в правую часть (5)

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^A Pdx &= \int_{M_0}^A (uv_x - vu_x - 2buv) dx = \int_{M_0}^A (uv_x + uv_x - 2buv) dx + vu \Big|_A^{M_0} = \\ &= 2 \int_{M_0}^A uRv dx + vu \Big|_A^{M_0}, \end{aligned}$$

где $Rv = v_x - bv$

Аналогично, вводя оператор $Tv = v_y - av$, преобразуем второй интеграл в правой части (5):

$$\int_B^{M_0} Q dy = -2 \int_B^{M_0} Tv u dy + vu \Big|_B^{M_0}$$

Используя (5) и полученные выражения имеем:

$$\begin{aligned} (vu) \Big|_{M_0} &= \frac{vu \Big|_B + vu \Big|_A}{2} - \int_{M_0}^A u R v dx + \int_B^{M_0} u T v dy - \\ &- \frac{1}{2} \int_{AB} (P dx + Q dy) + \int_D (v Lu - u Kv) dx dy \end{aligned} \quad (6)$$

На функцию v пока не было наложено никаких условий кроме гладкости. Поэтому можно выбрать функцию v так, чтобы максимально упростить правую часть (6).

Потребуем, чтобы было выполнено:

$$\begin{cases} Kv = 0 \\ Rv = v_x - bv = 0 \text{ на } M_0 A \\ Tv = v_y - av = 0 \text{ на } B M_0 \\ v = 1 \quad \text{в точке } M_0 \end{cases} \quad (7)$$

Функцией Римана $v = v(M, M_0)$ называется функция, являющаяся решением задачи (7).

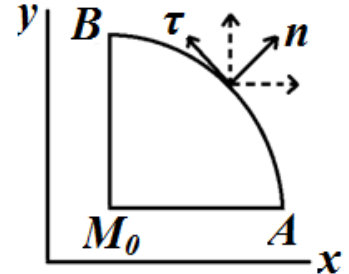
Задача (7) является задачей с данными на характеристиках – задачей Гурса. Эта задача была рассмотрена ранее. Ее решение существует и единственно.

Считая функцию Римана известной, подставим ее в выражение (6) и получим решение задачи (1) в виде:

$$u(M_0) = \frac{vu|_A + vu|_B}{2} + \int_D v f dx dy - \frac{1}{2} \int_{AB} (P dx + Q dy) \quad (8)$$

Для расчета последнего интеграла в (8) по контуру C между точками A и B , нужно представить частные производные функции u в следующем виде:

$$\begin{cases} u_x = u_\tau \cos(x, \tau) + u_n \cos(x, n) \\ u_y = u_\tau \cos(y, \tau) + u_n \cos(y, n) \end{cases}$$



Значения u_n и u_τ определяются условиями на кривой C в задаче (1).

Формула (8) является обобщением формулы Даламбера. Из формулы (8) видно, что значение $u(M_0)$ определяется условиями на участке AB кривой C и значениями f внутри характеристического (криволинейного) треугольника M_0AB .

Обратимся к требованию, наложенному выше на кривую C . Допустим, что характеристика пересекает контур C в двух точках. Тогда решение может не существовать.

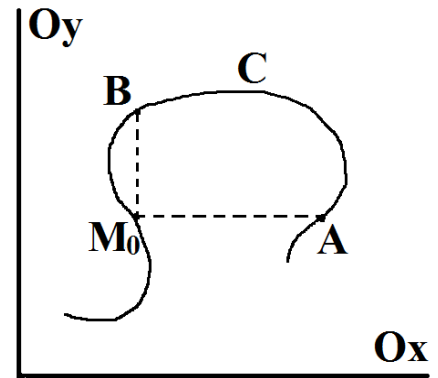


Рис. 2

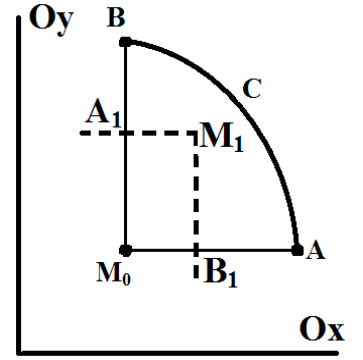
Действительно, рассмотрим ситуацию, изображенную на рис. 2.

В точке M_0 решение, с одной стороны, полностью определено условиями, заданными в криволинейном треугольнике M_0AB ; с другой стороны $M_0 \in C$, поэтому решение в этой точке определено вторым соотношением в (1). Если эти значения не совпадают, то решение не существует.

Смысл функции Римана.

Функция Римана $v(M, M_1)$ была определена в (8), как решение задачи с дифференциальным оператором \hat{K} . Рассмотрим решение $w = w(M, M_1)$ следующей задачи с оператором L :

$$\begin{cases} Lw = 0 \\ (w_x + bw)|_{M_1A_1} = 0 \\ (w_y + aw)|_{M_1B_1} = 0 \\ w(M_1) = 1 \end{cases} \quad (9)$$



Наша задача – показать, что функции $v(M, M_1)$ и $w(M, M_1)$ совпадают, т.е. решение (9) есть функция Римана. Имеем:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \int_{M_0B_1M_1A_1} (vLw - wKv) dx dy = \int_{M_0}^{B_1} P dx + \int_{A_1}^{M_0} Q dy + \int_{M_1}^{A_1} [wv_x - vw_x - 2bwv] dx + \\ &+ \int_{B_1}^{M_1} [vw_y - wv_y + 2awv] dy = 2(vw)|_{M_0} - ((vw)|_{B_1} + (vw)|_{A_1}) + ((vw)|_{A_1} + (vw)|_{M_1}) \\ &- ((vw)|_{M_1} - (vw)|_{B_1}) \end{aligned}$$

Приведя подобные члены в правой части, получим: $(vw)|_{M_0} = (vw)|_{M_1}$. Это равенство, с учетом условий $w(M_1) = 1$ и $v(M_0) = 1$, дает $w|_{M_0} = v|_{M_1}$. Отсюда имеем $v(M_0, M_1) = w(M_0, M_1)$. Таким образом, функция Римана есть решение задачи (9).

Для выяснения физического смысла функции Римана рассмотрим (обобщенное) решение задачи (1) с правой частью в виде дельта-функции и нулевыми граничными условиями:

$$\begin{cases} Lu = \delta(M, M_1) \\ u|_C = \frac{\partial u}{\partial n}|_C = 0 \end{cases} \quad (10)$$

По физическому смыслу задачи (10), ее решение является функцией влияния в точке M точечного импульса сообщенного в точке M_1 . Из (8) следует, что решением этой задачи будет функция Римана $u = v(M, M_1) = w(M, M_1)$. Таким образом, функция Римана – это функция влияния точечного импульса.

Уравнение с постоянными коэффициентами.

Пусть коэффициенты $a(x, y)$ и $b(x, y)$ равны тождественно нулю, а $c = const$. Тогда задача (9), определяющая функцию Римана, преобразуется в задачу:

$$\begin{cases} w_{xy} + cw = 0 \\ w = 1 \text{ на } M_0A \text{ и } M_0B \end{cases} \quad (11)$$

Найдем ее решение. Пусть точки M и M_0 имеют координаты $M = M(x, y)$, $M_0 = M_0(x_0, y_0)$. Будем искать решение задачи (11) в виде $w = g\left(\sqrt{(x-x_0)(y-y_0)}\right)$. Введем обозначение $z = \sqrt{(x-x_0)(y-y_0)}$. Тогда

$$g_x = g_z z_x = g_z \frac{y-y_0}{2z}$$

$$g_{xy} = g_{zz} \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{4z^2} + g_z \left(\frac{1}{2z} - \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{4z^3} \right) = \frac{g_{zz}}{4} + \frac{g_z}{4z}$$

С учетом условия $g(0) = 1$ задача (11) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} g_{zz} + \frac{g_z}{z} + 4cg = 0 \\ g(0) = 1 \end{cases} \quad (12)$$

Ее решением является функция Бесселя нулевого порядка:
 $g(x, y) = J_0\left(2\sqrt{c(x-x_0)(y-y_0)}\right)$. Таким образом, найдена функция Римана для случая $a = b = 0$, $c = const$.

Задача Коши для уравнения колебаний.

Рассмотрим задачу Коши на бесконечной прямой для уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} + au_t + bu_z + gu = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(z) \\ u_t|_{t=0} = \psi(z) \end{cases} \quad (13)$$

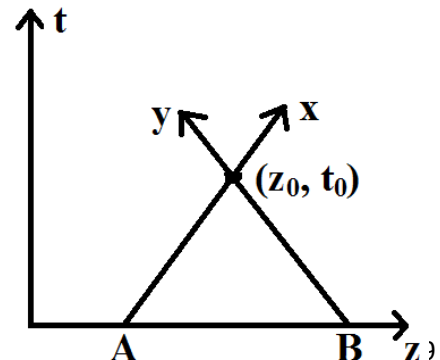
где $a, b, g = const$, $z \in \mathbb{R}$. Будем искать решение в виде $u = Ue^{(bz-at)/2}$

Подставив такой вид функции $u(z, t)$ в систему (13), получим следующую систему уравнений относительно $U(z, t)$:

$$\begin{aligned} U_{tt} - U_{zz} + cU &= 0 \\ U|_{t=0} &= \varphi(z)e^{-bz/2} = \varphi_1(z) \\ U_t|_{t=0} &= \left(\psi(z) + \frac{a}{2}\varphi(z)\right)e^{-bz/2} = \psi_1(z) \end{aligned} \quad (14)$$

где $c = g + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$. Делаем замену

переменных: $x = t + z$, $y = t - z$.



Соответственно: $t = \frac{x+y}{2}$, $z = \frac{x-y}{2}$.

В переменных x, y уравнение задачи (14) приобретает вид:

$$U_{xy} + \frac{c}{4}U = 0 \quad (15)$$

Для него функция Римана построена в предыдущем пункте. Она равна

$$v = J_0\left(\sqrt{c(x-x_0)(y-y_0)}\right) = J_0\left(\sqrt{c}\sqrt{(t-t_0)^2 - (z-z_0)^2}\right). \quad \text{Формула (8)}$$

определяет решение задачи (15):

$$\begin{aligned} U(z_0, t_0) &= \frac{(Uv)|_A + (Uv)|_B}{2} - \frac{1}{2} \int_A^B [(-U_x v + v_x U)dx + (U_y v - v_y U)dy] = \\ &= \frac{U|_A + U|_B}{2} - \frac{1}{2} \int_A^B \left[\left(-\frac{U_t + U_z}{2} v + \frac{v_t + v_z}{2} U \right) dz - \left(\frac{U_t - U_z}{2} v - \frac{v_t - v_z}{2} U \right) dz \right] = \\ &= \frac{U|_A + U|_B}{2} + \frac{1}{2} \int_A^B [(vU_t - Uv_t)dz] = \frac{\varphi_1(z_0 - t_0) + \varphi_1(z_0 + t_0)}{2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{z_0-t_0}^{z_0+t_0} \left[\psi_1(z) J_0\left(\sqrt{c}\sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}\right) - \varphi_1(z) \frac{J_1\left(\sqrt{c}\sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}\right)}{\sqrt{t_0^2 - (z-z_0)^2}} \sqrt{ct_0} \right] dz \end{aligned} \quad (16)$$

Выражая с помощью (14) функции φ_1 и ψ_1 через φ и ψ , получаем решение задачи (13).

Если $a = b = g = 0$, то $\varphi = \varphi_1$, $\psi = \psi_1$. Поскольку $J_0(0) = 1$, а $J_1(0) = 0$ то формула (16) переходит в формулу Даламбера:

$$u(z_0, t_0) = \frac{\varphi(z_0 - t_0) + \varphi(z_0 + t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{z_0-t_0}^{z_0+t_0} \psi(z) dz$$

Функция влияния точечного импульса.

Функция влияния точечного импульса определяется, как решение (в классе обобщенных функций) задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} + au_t + bu_z + gu = 0 \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = \delta(z - z_0) \end{cases} \quad (17)$$

Используя (16) получаем:

$$\begin{aligned} u(z, t) &= e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} \left\{ \frac{1}{2} \int_{z-t}^{z+t} \delta(\eta - z_0) e^{-\frac{b}{2}\eta} J_0 \left(\sqrt{c} \sqrt{t^2 - (\eta - z)^2} \right) d\eta \right\} = \\ &= \begin{cases} e^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}(z-z_0)} \frac{J_0 \left(\sqrt{c} \sqrt{t^2 - (z - z_0)^2} \right)}{2}, & \text{для } |z - z_0| < t \\ 0 & \text{, для } |z - z_0| > t \end{cases} \quad (18) \end{aligned}$$

где $c = g + \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$.

Если $a = b = g = 0$, то $u(z, t) = \frac{1}{2} H(t - |z - z_0|) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{для } |z - z_0| < t \\ 0, & \text{для } |z - z_0| > t \end{cases}$

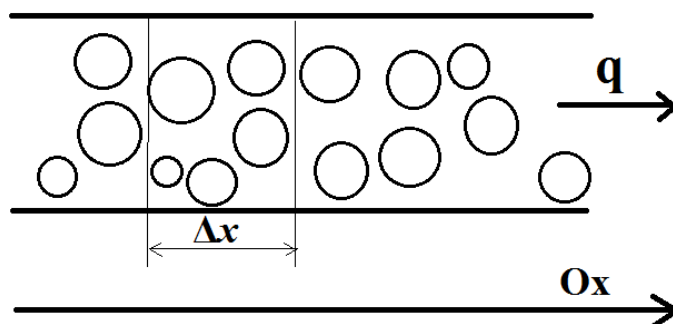
§3. Перенос вещества в двухфазной среде. Динамика сорбции.

Постановка задачи.

Сорбент – это вещество, способное собирать на своей поверхности некоторый компонент из окружающей среды. Таким веществом, например, является уголь в противогазе, или гранулы в фильтре для очистки питьевой

воды. Явление сорбции распространено в природных и технологических процессах. Рассмотрим задачу сорбции в простейшем виде.

Пусть имеется колонка, заполненная гранулами сорбента. По колонке слева направо с постоянной скоростью q движется поток жидкости (или газа), который переносит растворенное в нем изучаемое вещество - целевой компонент. Этот компонент может селективно осаждаться на поверхности гранул сорбента.

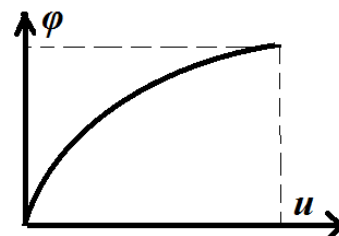


Введем следующие обозначения:

$u(x, t)$ - концентрация компонента в межзерновом пространстве (количество компонента в межзерновом пространстве на единицу объема колонки);

$a(x, t)$ - концентрация компонента, сорбированного на поверхности гранул (количество сорбированного компонента на единицу объема колонки).

Функция $a = \varphi(u)$, связывающая концентрацию компонента в фазе сорбента с его концентрацией в фазе раствора при условии их равновесия (равновесные концентрации) называется изотермой сорбции. С ростом концентрации компонента количество свободных мест на поверхности сорбента, куда могут садиться его молекулы, убывает. Поэтому кривая $\varphi(u)$ выходит на насыщение.



Обычно рассматривают одну из двух изотерм: в случае малых концентраций - изотерму Генри $a = \Gamma u$, где Γ константа – наклон кривой

$\varphi(u)$ на начальном участке; в случае значительных концентраций – изотерму Ленгмюра $a = \varphi(u) = \frac{k_1 u}{u + k}$.

Поскольку изотерма является взаимно-однозначной функцией, можно рассматривать и обратную изотерму в виде $u = \psi(a)$. Обратные изотермы будут соответственно задаваться следующими функциями:

для изотермы Генри $u = \psi(a) = \frac{a}{\Gamma}$

и для изотермы Ленгмюра $u = \psi(a) = \frac{ka}{k_1 - a}$.

Рассмотрим некоторый малый участок Δx и запишем уравнение баланса рассматриваемого компонента за время Δt :

$$\int_x^{x+\Delta x} [a(\eta, t + \Delta t) + u(\eta, t + \Delta t) - a(\eta, t) - u(\eta, t)] d\eta = \int_t^{t+\Delta t} q[u(x, \tau) - u(x + \Delta x, \tau)] d\tau \quad (1)$$

Полагаем, что функции $u(x, t)$ и $a(x, t)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка. Тогда, поделив равенство (1) на $\Delta x \Delta t$, устремив Δx и Δt к нулю, получим уравнение баланса вещества в дифференциальном виде:

$$a_t + u_t + qu_x = 0 \quad (2)$$

Учтем, что сорбция вещества происходит не мгновенно, а за некоторое время. Скорость изменения концентрации сорбированного вещества пропорциональна разности текущей и равновесной концентраций. Дополняя уравнение (2) кинетическим уравнением, и задавая начальные и граничные условия, можно поставить простейшую задачу сорбции в области $x > 0$, $t > 0$:

$$\begin{cases} a_t + u_t + qu_x = 0 \\ a_t = \beta(u - \psi(a)) \\ a|_{t=0} = u|_{t=0} = 0 \\ u|_{x=0} = u_0 \end{cases} \quad (3)$$

где β кинетический коэффициент.

Выражение $\tau = t - x/q$ называется локальным временем. Значение τ «запаздывает» относительно t на время переноса вещества от границы до рассматриваемой точки x . Рассмотрим u как функцию переменных τ, x . Тогда

$$\frac{\partial u(\tau, x)}{\partial t} + q \frac{\partial u(\tau, x)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} + q \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dx} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial u}{\partial \tau} + q \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \left(-\frac{1}{q} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = q \frac{\partial u}{\partial x}$$

Таким образом, при переходе к локальному времени, выполнено: $u_t + qu_x = qu_x$. Это делает первое уравнение (3) более простым. Вообще, переход к локальному времени является типичным приемом в задачах переноса вещества.

Для решения задачи (3) введем новые переменные:

$$\tau = \beta \left(t - \frac{x}{q} \right), \quad \xi = \beta \frac{x}{q}$$

При этом область $x > 0, t > 0$ переходит в область $\xi > 0, \tau > -\xi$. Система уравнений (3) преобразуется в систему:

$$\begin{cases} a_\tau + u_\xi = 0 \\ a_\tau = u - \psi(a) \\ a|_{\tau=-\xi} = u|_{\tau=-\xi} = 0 \\ u|_{\xi=0} = u_0 \end{cases} \quad (4)$$

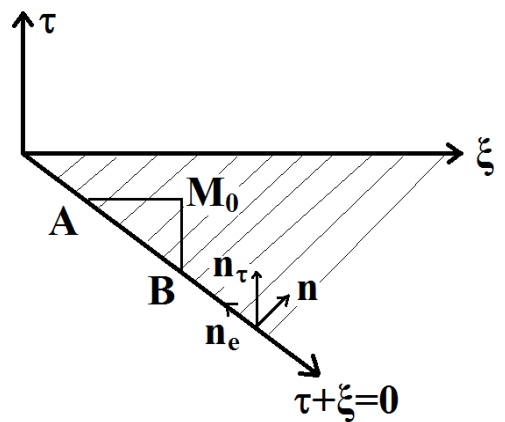


Рис. 1

Продифференцировав второе уравнение системы (4) по ξ и используя первое уравнение, имеем:

$$\begin{cases} a_{\tau\xi} + a_{\tau} + \psi'(a)a_{\xi} = 0 \\ a|_{\tau+\xi=0} = 0, \quad a_{\tau}|_{\tau+\xi=0} = (u - \psi(a))|_{\tau+\xi=0} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Рассмотрим произвольное решение (5) в области $-\xi \leq \tau \leq 0$ (заштрихованной на рис.1). При любой фиксированной функции a , можно рассматривать $\psi'(a)$, как заданный переменный коэффициент k . Далее, на прямой $\xi + \tau = 0$ выполнено: $a_{\tau} = a_n \cos(\pi/4) + a_l \cos(\pi/4)$, где l вектор вдоль прямой, а n по нормали к ней. (См. рис. 1). Отсюда и из граничных условий (5), получаем: $a_n|_{\xi+\tau=0} = 0$. В результате, в заштрихованной области имеем задачу:

$$\begin{cases} a_{\xi\tau} + ka_{\xi} + a_{\tau} = 0 \\ a = a_n = 0 \text{ при } \xi + \tau = 0 \end{cases}$$

Согласно формуле (8) из §2, значение a в любой точке M_0 , принадлежащей заштрихованной области, определяется заданными (нулевыми в данном случае) условиями на отрезке AB – основании характеристического треугольника M_0AB . Отсюда a равно нулю всюду в заштрихованной области. По непрерывности $a = 0$ при $\tau = 0$.

На границе $\xi = 0$, согласно (4), выполнено:

$$a_{\tau} = u_0 - \psi(a), \quad a_{\tau=0} = 0 \quad (6)$$

Обозначим решение этой задачи, как $Q(\tau)$. Тогда в области $\xi > 0, \tau > 0$ получаем задачу:

$$\begin{cases} a_{\tau\xi} + a_{\tau} + \psi'(a)a_{\xi} = 0 \\ a|_{\tau=0} = 0, \quad a|_{\xi=0} = Q(\tau) \end{cases} \quad (7)$$

к исследованию решения которой мы и перейдем.

Рассмотрим линейный случай - задачу с изотермой Генри, и нелинейный случай – задачу с изотермой Ленгмюра.

Линейный случай.

Пусть $\varphi(u) = \Gamma u$, соответственно $\psi(a) = a / \Gamma$. Для этого случая решаем задачу (6) и подставляем найденную функцию $Q(\tau)$ в (7). Получаем задачу Гурса:

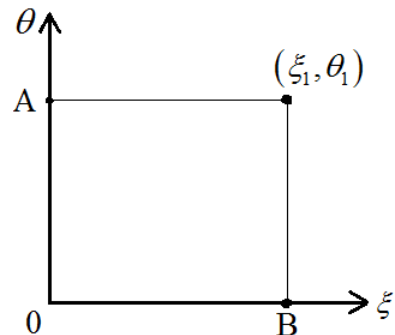
$$\begin{cases} a_{\tau\xi} + a_\tau + a_\xi / \Gamma = 0 \\ a|_{\tau=0} = 0, \quad a|_{\xi=0} = \Gamma u_0 (1 - e^{-\tau/\Gamma}) \end{cases}$$

Для простоты записи введем новую переменную $\theta = \tau / \Gamma$ и выберем без ограничения общности (задача линейна) значение u_0 таким, что $\Gamma u_0 = 1$. Тогда в области $\theta > 0, \tau > 0$ имеем:

$$\begin{cases} a_{\theta\xi} + a_\theta + a_\xi = 0 \\ a|_{\theta=0} = 0, \quad a|_{\xi=0} = 1 - e^{-\theta} \end{cases} \quad (8)$$

Делаем замену функции: $a = ze^{-(\theta+\xi)}$. Вычисляя производные z по ξ и θ , подставляя их в (8), получаем:

$$\begin{cases} z_\xi \theta - z = 0 \\ z|_{\theta=0} = 0, \quad z|_{\xi=0} = e^\theta - 1 \end{cases}$$



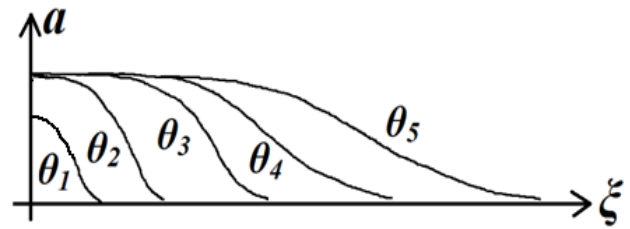
Функция Римана для этой задачи была построена в §2. Она имеет вид: $v(\xi, \theta, \xi_1, \theta_1) = I_0 \left(2\sqrt{(\xi - \xi_1)(\theta - \theta_1)} \right)$, где I_0 - функция Инфельда нулевого порядка. Согласно (8) из §2 имеем:

$$\begin{aligned}
z(\theta_1, \xi_1) &= \frac{(zv)_A + (zv)_B}{2} - \frac{1}{2} \int_A^B [(zv_\xi - v z_\xi) d\xi + (v z_\theta - z v_\theta) d\theta] = \\
&= \frac{e^{\theta_1} - 1}{2} - \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^0 [v z_\theta - z v_\theta]_{\xi=0} d\theta = \frac{e^{\theta_1} - 1}{2} + \frac{[zv]_{\theta=0, \xi=0}^{\theta=\theta_1, \xi=0}}{2} + \int_0^{\theta_1} [v z_\theta]_{\xi=0} d\theta = \\
&= \int_0^{\theta_1} e^\theta I_0(2\sqrt{\xi_1(\theta_1 - \theta)}) d\xi
\end{aligned}$$

Отсюда находим, что решение задачи (7) выражается формулой:

$$\begin{aligned}
a(\theta_1, \xi_1) &= z e^{-(\theta_1 + \xi_1)} = \int_0^{\theta_1} e^{-(\theta_1 - \theta)} e^{-\xi_1} I_0(2\sqrt{\xi_1(\theta_1 - \theta)}) d\theta = \\
&= e^{-\xi_1} \int_0^{\theta_1} e^{-\theta} I_0(2\sqrt{\xi_1 \theta}) d\theta
\end{aligned}$$

На рисунке изображен вид решения для нескольких моментов времени θ . Значение концентрации целевого компонента в фазе сорбента на границе (входе в сорбционную колонку) со временем возрастает до 1, фронт распространения компонента продвигается вдоль колонки, расплываясь.



Нелинейный случай.

Рассмотрим случай изотермы Ленгмюра

$$a = \varphi(u) = \frac{k_1 u}{u + k}$$

Коэффициент k_1 - это максимальное количество компонента в сорбированной фазе, соответствующее $u \rightarrow \infty$. ($0 \leq a < k_1$). Обратная

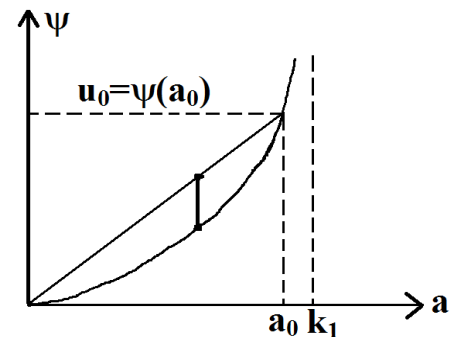


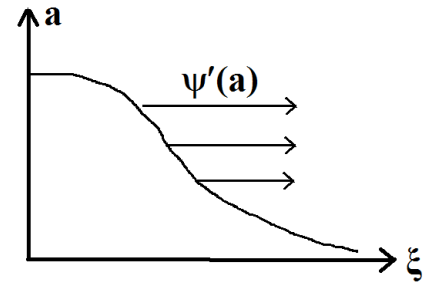
Рис. 2.

зависимость равновесного значения u от a имеет вид $u = \psi(a) = \frac{ka}{k_1 - a}$.

Последняя зависимость показана на рисунке. Находим $\psi'(a) = \frac{k_1 k}{(k_1 - a)^2} > 0$,

$$\psi'' = \frac{2k_1 k}{(k_1 - a)^3} > 0.$$

Рассмотрим качественный характер решения уравнений задачи (4) в этом случае. Пусть профиль a , как функции ξ , имеет вид плавно убывающей функции. Тогда, $u \approx \psi(a)$. Из первого уравнения $a_\tau + u_\xi = 0$ получаем: $a_\tau + \psi'(a)a_\xi = 0$. Это - квазилинейное уравнение.



Как известно из курса дифференциальных уравнений (и будет нами обсуждаться в §1 Главы 2), в этом уравнении $\psi'(a)$ - коэффициент, стоящий при a_ξ - имеет смысл скорости переноса со временем значения a вдоль оси ξ . Поскольку $\psi'(a)$ растущая функция a , то большие значения a переносятся быстрее. Фронт становится более крутым. Однако из уравнения кинетики следует, что $a_\tau = -u_\xi = u - \psi(a) < u_{\max}$. Следовательно, крутизна фронта ограничена. Решение выходит на режим бегущей волны $a = f(\xi - v\tau)$, когда образуется некоторый установившийся профиль, переносимый вдоль оси ξ . Численное моделирование процесса, подтверждает приведенные качественные соображения.

Определим вид функции f . Для этого рассмотрим решение в форме бегущей волны $a = f(\xi - v\tau)$ следующей задачи на бесконечном участке $-\infty < \xi < \infty$:

$$\begin{cases} a_{\tau\xi} + a_\tau + \psi'(a)a_\xi = 0 \\ a|_{\xi=-\infty} = a_0, \quad a|_{\xi=\infty} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя искомый вид решения в условия (9) получаем:

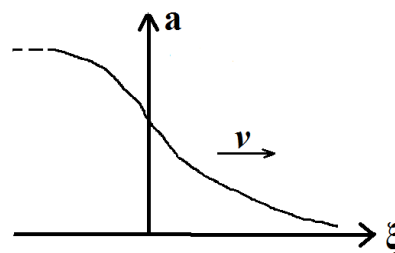
$$\begin{cases} -vf'' - vf' + \psi'(f)f' = 0 \\ f(-\infty) = a_0, \quad f'(-\infty) = f(\infty) = f'(\infty) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Интегрируя уравнение (10) от $-\infty$ до ∞ , имеем: $va_0 = \psi(a_0)$. Отсюда находим скорость переноса: $v = \frac{\psi(a_0)}{a_0}$. Интегрируя уравнение (10) от α до ∞ , получаем: $vf'(\alpha) + vf(\alpha) - \psi(f(\alpha)) = 0$. Используя найденное значение v , имеем:

$$\frac{\psi(a_0)}{a_0} \frac{df}{d\alpha} = \psi(f) - \frac{\psi(a_0)}{a_0} f.$$

Это уравнение определяет профиль бегущей волны $f(\alpha)$. Значение правой части уравнения равно длине вертикального отрезка между прямой и кривой, соединяющих точку 0 с точкой $((a_0, \psi(a_0)))$, на рис. 2.

Видно, что производная $\frac{df}{d\alpha}$ отрицательна, мала при $a \approx 0$ и $a \approx a_0$ и возрастает по модулю в средней части интервала значений a .



Итак, сравнивая результаты, полученные для линейного и нелинейного случаев, видим, что в линейном случае фронт волны концентрации представляет собой продвигающийся по сорбционной колонке расплывающийся профиль. В нелинейном случае образуется бегущая волна постоянного профиля. Образование подобных структур имеет место во многих нелинейных задачах.

§4. Метод подобия. Задача Стефана

Метод подобия

В некоторых физических задачах уравнения и дополнительные условия сохраняются, если переменные x_i изменить в некоторой пропорции.

В этом случае целесообразно применять метод подобия, позволяющий уменьшать число переменных, взяв в качестве новых переменных комбинацию старых. Рассмотрим этот прием на примере известной нам одномерной задачи теплопроводности в бесконечной области $-\infty < x < \infty$:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что при умножении переменной t на k^2 и переменной x на k все уравнения сохраняются. Поэтому можем искать решение в виде функции переменной $\frac{x}{\sqrt{t}}$. Обозначим $\frac{x}{2a\sqrt{t}} = z$. Ищем решение в форме $u = f(z)$.

Тогда первое уравнение системы (1) будет выглядеть так:
 $-f' \frac{z}{2t} = a^2 f'' \frac{1}{4a^2 t}$, а вся система (1) приводится к виду:

$$\begin{cases} f'' = -2zf' \\ f(-\infty) = 0 \\ f(\infty) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Задача (2) легко решается. Имеем: $f' = Ce^{-z^2}$. Отсюда $f(z) = C \int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx$.

Константу C определяем подстановкой решения в правое граничное условие: $f(\infty) = 1 = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = C\sqrt{\pi}$. Следовательно, $C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

Таким образом:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} (1 + \Phi(z)) \quad (3)$$

где Φ - интеграл ошибок. И, наконец, возвращаясь к исходным переменным, получаем известное решение задачи:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 + \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right)$$

Если исходное уравнение нелинейно, то взаимосвязь между переменными помогает свести уравнение в частных производных к уравнению в обыкновенных производных. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u_t = (k(u)u_x)_x \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (4)$$

Заменой $\frac{x}{2\sqrt{t}} = z$ система приводится к виду:

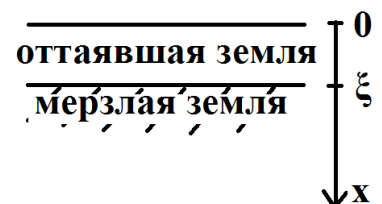
$$\begin{cases} (k(f)f')' = -2zf' \\ f(-\infty) = 0 \quad f(\infty) = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Полученное уравнение в системе (5) также является нелинейным, поэтому аналитически его решить не представляется возможным. Однако исследовать и численно решить задачу (5) заметно легче, чем исходную задачу (4).

Задача Стефана (задача о фазовом переходе)

Задачей Стефана называется задача о распространении тепла в двух соприкасающихся областях, граница между которыми может перемещаться вследствие фазового перехода.

Рассмотрим эту задачу на примере процесса оттаивания мерзлой земли. Пусть везде в почве, ниже дневной поверхности, начальная температура



отрицательная и равная $C_- < 0$, а на поверхности, начиная с момента времени $t = 0$, температура положительная, постоянная и равная $C_+ > 0$. С течением времени земля прогревается вглубь и при достижении нулевой температуры – оттаивает. Требуется определить температурный профиль почвы и скорость движения границы, отмеченной на рис. координатой ξ , на которой температура равна нулю и происходит переход воды из фазы льда в фазу жидкости.

Физические коэффициенты у замерзшей и оттаявшей земли различны. Поэтому для описания теплопереноса в этих зонах будем рассматривать отдельно температуру u_1 - для $x < \xi$ и u_2 - для $x > \xi$.

Учтем, что фазовый переход требует затрат тепла. Пусть λ - скрытая теплота плавления. Тогда процесс можно описать следующей моделью:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad \xi < x < \infty \\ u_1(\xi, t) = u_2(\xi, t) = 0 \\ \left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \Big|_{x=\xi} = -\lambda \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \xi|_{t=0} = 0 \\ u_1|_{x=0} = C^+ > 0, \quad u_2|_{t=0} = C^- < 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

Исходя из соображений подобия, будем искать решение в виде $u_i = f_i(z)$, где $i = 1, 2$, а $z = \frac{x}{2\sqrt{t}}$. Обозначим значение z , соответствующее границе фазового перехода, как α . Тогда

$$\xi = 2\alpha\sqrt{t} \quad (7)$$

Подставляя такой вид решения в (6), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1^2 f_1'' = -2zf_1', 0 < z < \alpha \\ a_2^2 f_2'' = -2zf_2', \alpha < z < \infty \\ f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0 \\ \left(k_1 f_1' - k_2 f_2' \right) \Big|_{z=\alpha} = -2\lambda\alpha \\ f_1(0) = C^+ > 0 \\ f_2(\infty) = C^- < 0 \end{cases} \quad (8)$$

Решение последней задачи будем искать в виде:

$$\begin{cases} f_1 = C^+ + p_1 \Phi\left(\frac{z}{a_1}\right) \\ f_2 = C^- + p_2 \left[1 - \Phi\left(\frac{z}{a_2}\right) \right] \end{cases}$$

При таком выборе формы решения, функции f_i удовлетворяют уравнениям теплопроводности (См. переход от (2) к (3)), а также выполнены условия при $z = 0$ и $z = \infty$. Для определения значений параметров p_i и α используем оставшиеся третье и четвертое уравнение системы (8). Получаем:

$$\begin{cases} C^+ + p_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{a_1}\right) = 0 \\ C^- + p_2 \left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{a_2}\right) \right] = 0 \\ \frac{k_1 p_1}{a_1} e^{-\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2} + \frac{k_2 p_2}{a_2} e^{-\left(\frac{\alpha}{a_2}\right)^2} = -2\lambda\alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{cases} \quad (9)$$

Выражая p_1 и p_2 из первых двух уравнений этой системы и подставляя их в третье уравнение, получаем алгебраическое уравнение для определения параметра α :

$$\frac{k_1 C^+}{a_1} \frac{e^{-\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)^2}}{\Phi\left(\frac{\alpha}{a_1}\right)} + \frac{k_2 C^-}{a_2} \frac{e^{-\left(\frac{\alpha}{a_2}\right)^2}}{1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{a_2}\right)} = \lambda \alpha \sqrt{\pi} \quad (10)$$

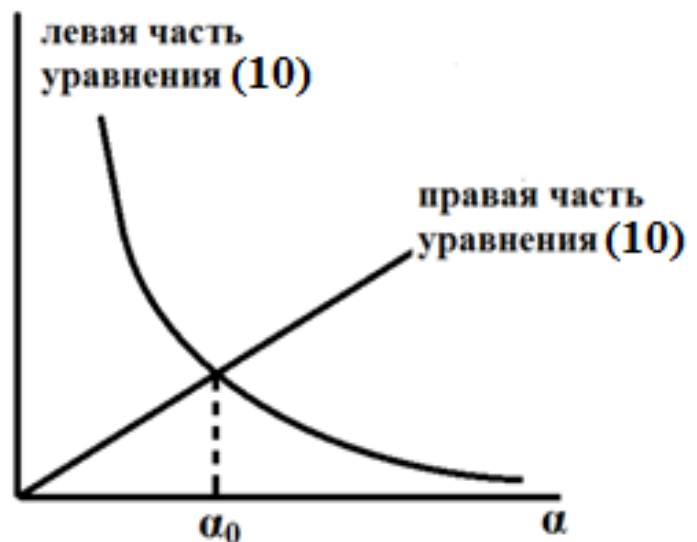
Заметим, что с ростом α числитель первого слагаемого убывает, а знаменатель – растет. Таким образом, первое слагаемое левой части уравнения (10) монотонно убывает с ростом α . Нетрудно также проверить, что и второе слагаемое также монотонно убывает (оно является отрицательным и монотонно растет по модулю). Для этого рассмотрим следующий интеграл, являющийся с точностью до константы обратным ко второму слагаемому (10):

$$I(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(x)] e^{x^2} = \int_x^{\infty} e^{-\alpha^2 + x^2} d\alpha = \int_x^{\infty} e^{-(\alpha-x)(\alpha+x)} d\alpha \leq \int_x^{\infty} e^{-(\alpha-x)2x} d\alpha = \frac{1}{2x}$$

Его производная отрицательна:

$$\frac{dI}{dx} = -1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(x)] e^{x^2} 2x < 0$$

Мы получили, что второе слагаемое в (10) является отрицательным ($C_- < 0$) и монотонно растет по модулю с ростом α . В связи с этим, оба слагаемых в левой части уравнения (10) монотонно убывают, а правая часть уравнения является возрастающей функцией. Значит уравнение (10) имеет единственное решение.



По найденному из уравнения (10) значению параметра α , получаем из (7) закон движения фазовой границы. Зная α , находим из (9) коэффициенты p_1 и p_2 , что определяет функции f_i - решение исходной задачи.

§5. Постановка задач с уравнением Гельмгольца в неограниченной области.

Уравнением Гельмгольца называется уравнение вида:

$$\Delta u + cu = f$$

Постановка задач в неограниченной области с этим уравнением и свойства решения существенно зависят от знака коэффициента c .

Типичной физической задачей, приводящей к уравнению Гельмгольца с отрицательным значением c , является следующая задача. Рассмотрим уравнения диффузии вещества с его распадом при наличии стационарных источников.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u - ku + F(M)$$

С течением времени решение выходит на стационарный режим, при котором $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$. Ему соответствует уравнение Гельмгольца

$$\Delta u - \chi^2 u = f \tag{1}$$

где $\chi^2 = \frac{k}{a^2}$, а $f = \frac{F}{a^2}$.

В курсе «Методов математической физики» было показано, что для уравнения (1) справедлив принцип максимума. Он гласит, что в замкнутой области решение не может достигать положительного максимума или отрицательного минимума во внутренней точке.

На базе принципа максимума легко доказать, что решение задачи

$$\begin{cases} \Delta u - \chi^2 u = f \\ u \rightarrow 0 \text{ равномерно по углу} \\ r \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2)$$

единственно.

Действительно, пусть u_1 и u_2 - два различных решения задачи (2), а $w = u_1 - u_2$. Функция w удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} \Delta w - \varepsilon^2 w = 0 \\ w \Rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty \end{cases}$$

Пусть $w \neq 0$ в некоторой точке M_0 . Рассмотрим сферу C_R большого радиуса R , с центром в начале координат, включающую M_0 внутрь себя. Из принципа максимума и условий на бесконечности следует: $|w(M_0)| \leq \max_{M \in C_R} |w(M)| \rightarrow 0$. Отсюда $w(M_0) = 0$. Поскольку M_0 произвольная точка, то $w \equiv 0$ и решение задачи (2) единственно.

Теперь обратимся к уравнению Гельмгольца с положительным коэффициентом $c = k^2$:

$$\Delta u + k^2 u = f \quad (3)$$

Уравнение такого типа может получиться при решении задачи колебаний:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v + F(M) e^{i\omega t}$$

Будем искать решение последнего уравнения в виде $v = u(M) e^{i\omega t}$. При подстановке v в уравнение и сокращения на $e^{i\omega t}$ для функции $u(M)$ получим: $\Delta u + k^2 u = -\frac{F}{a^2}$, где $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$, то есть уравнение вида (3).

Для уравнения (3) принцип максимума не справедлив.

Пусть функция f финитная, т.е. отличная от нуля только в некоторой конечной области D . С помощью объемных потенциалов можно построить два решения, стремящиеся к нулю при $R \rightarrow \infty$. Действительно, фундаментальными решениями однородного уравнения (3) будут:

$$U(M, P) = \frac{e^{\pm ikR_{MP}}}{R_{MP}}. \text{ Следовательно, решениями (3) являются функции}$$

$$u_{1,2}(M) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{\pm ikR_{MP}}}{R_{MP}} f(P) dV_P. \text{ При любом выборе знака в показателе}$$

экспоненты решение убывает, когда точка удаляется от области D . Получаем, что условия $u \rightarrow 0$ не достаточно для выделения единственного решения.

Условия излучения

Рассмотрим однородное уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w \tag{4}$$

Будем искать его решение в виде $w(r, t) = \frac{v(r, t)}{r}$. Нетрудно проверить, что после подстановки указанного вида решения в уравнение, для функции $v(r, t)$ получим: $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$. Решением последнего уравнения являются произвольные функции от переменных $(r \pm at)$. Поэтому

$$w_1(r, t) = \frac{f_1(r + at)}{r} \text{ и } w_2(r, t) = \frac{f_2(r - at)}{r} \text{ являются решениями уравнения (4).}$$

Функция $w_1(r, t)$ представляет собой возмущение, уходящее от источника в центре на бесконечность - физически реальное решение. Функция w_2 является, наоборот, сходящейся волной.

Считая временную зависимость гармонической, получаем

$$w_1(r, t) = u_1(M) e^{i\omega t} = \frac{e^{-ikr}}{r} e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad w_2(r, t) = u_2(M) e^{i\omega t} = \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t}.$$

Соответственно, существуют два решения однородного уравнения (3): $\frac{e^{-ikr}}{r}$ и $\frac{e^{ikr}}{r}$.

Чтобы выделить решение u_1 , соответствующее w_1 , можно использовать следующее условие:

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} + iku_1 = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \quad (5)$$

Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial r} u_1(r) + iku_1 = \left[-ik \frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{e^{-ikr}}{r^2} \right] + ik \frac{e^{-ikr}}{r} = -\frac{e^{-ikr}}{r^2} = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right), \quad \text{а}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u_2(r) + iku_2 = \left[ik \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right] + ik \frac{e^{ikr}}{r} = O\left(\frac{1}{r}\right). \text{ Следовательно, условию (5)}$$

решение u_2 не удовлетворяет.

Теперь покажем, что решение задачи

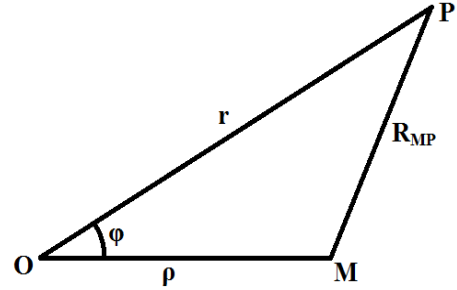
$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= f \\ \frac{\partial u}{\partial r} + iku &= \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \\ u &= \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

единственно. Последние два условия в задаче (6) называются условиями излучения Зоммерфельда.

Вначале рассмотрим фундаментальное решение уравнения (3):

$$U(M, P) = \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}}.$$

Фиксируем точку M , а точку P будем удалять от нуля. При этом ρ постоянно, а r и $R = R_{MP}$ увеличиваются. Имеем:



$$R = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi} = r \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 - 2\frac{\rho}{r} \cos \varphi}$$

Т.к. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \bar{o}(x)$, то при $r \rightarrow \infty$ справедливо: $R = r \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right)$.

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{r - \rho \cos \varphi}{\sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \varphi}} = \frac{1 - (\rho/r) \cos \varphi}{\sqrt{1 + (\rho/r)^2 - 2(\rho/r) \cos \varphi}} = 1 + \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Проверим, что для фундаментального решения $U(M, P) = \frac{e^{-ikR}}{R}$ выполнены условия Зоммерфельда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) + ik \frac{e^{-ikR}}{R} &= \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-ikR}}{R} \right) \frac{\partial R}{\partial r} + ik \frac{e^{-ikR}}{R} = \\ &= \left(-ik \frac{e^{-ikR}}{R} - \frac{e^{-ikR}}{R^2} \right) \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right) \right) + ik \frac{e^{-ikR}}{R} = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{e^{-ikR}}{R} = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right)$$

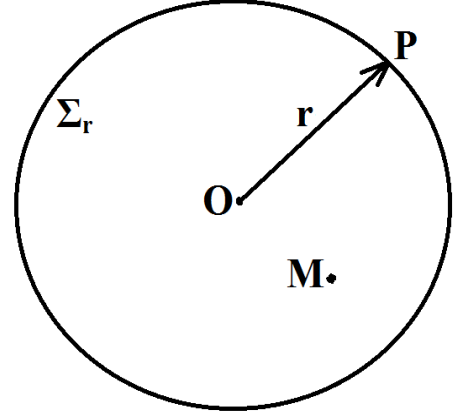
Теперь докажем единственность решения задачи (6).

Пусть $u_1(M)$ и $u_2(M)$ - два разных решения этой задачи. Тогда функция $z = u_1 - u_2$ удовлетворяет условиям:

$$\Delta z + k^2 z = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} + ikz = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$z = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$$



Фиксируем произвольную точку M и возьмем сферу большого радиуса r так, что M лежит внутри сферы. Напишем 3-ю формулу Грина:

$$4\pi z(M) = \int_{\Sigma_r} \left(\frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \frac{\partial z}{\partial n}(P) - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \right) z \right) d\sigma_P$$

$$\text{Т.к. } \frac{\partial z}{\partial n} \Big|_{P \in \Sigma_r} = \frac{\partial z}{\partial r} \Big|_{P \in \Sigma_r}, \text{ то}$$

$$\begin{aligned} 4\pi z(M) &= \int_{\Sigma_r} \left(\frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \left(-ikz + \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \right) - \left(-ik \frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} + \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \right) z \right) d\sigma_P = \\ &= \int_{\Sigma_r} \left(\frac{e^{-ikR_{MP}}}{R_{MP}} \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) - \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) z \right) d\sigma_P = \int_{\Sigma_r} \bar{o}\left(\frac{1}{r^2}\right) d\sigma_P \end{aligned}$$

Площадь сферы Σ_r с ростом r растет, как r^2 . Поэтому

$$4\pi z(M) = \int_{\Sigma_r} \bar{o}\left(\frac{1}{r^2}\right) d\sigma_P \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad \text{Следовательно } z(M) = 0. \quad \text{В силу}$$

произвольного выбора точки M , получаем $z \equiv 0$, что означает единственность решения задачи (6).

Замечание 1:

Условия $\frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$ позволяют отобрать единственное решение уравнения $\Delta u + k^2 u = f$ в неограниченной области. Условия $\frac{\partial u}{\partial r} - iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right), \quad u = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$ также позволяют выделить единственное (другое) решение. В этом смысле они равноценны. Если же к уравнению $\Delta u + k^2 u = f$ мы пришли, описывая пространственную часть решения уравнения колебаний (в случае, когда колебания гармонические по времени), то знак перед слагаемым iku в условиях излучения должен быть согласован с выбором знака у временной гармоники. А именно, если решение уравнения колебаний ищется в виде $v = u(M)e^{i\omega t}$, то физически разумное, расходящееся от источников решение, соответствует условию излучения $\frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right)$. Если же решение уравнения колебаний ищется в виде $v = u(M)e^{-i\omega t}$, то физически разумное решение выделяется условием $\frac{\partial u}{\partial r} - iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right)$.

Замечание 2:

В двумерном случае условия излучения имеют вид:

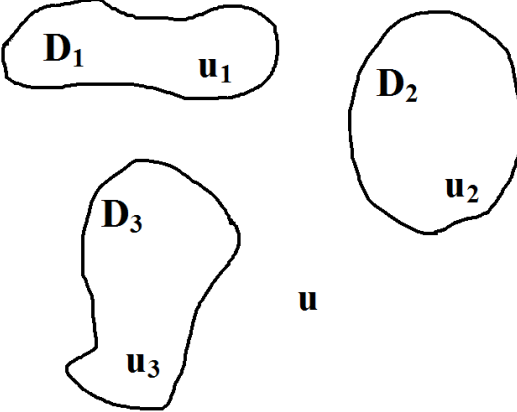
$$\frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad u = \underline{O}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$$

Математическая задача дифракции.

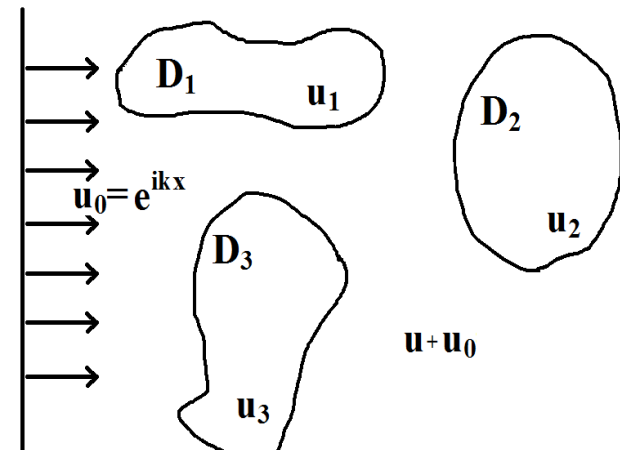
Задача дифракции возникает при изучении рассеяния различного вида волн (сейсмических, звуковых, электромагнитных) на препятствиях.

Пусть в неограниченном пространстве D расположены области D_i , в которых физические характеристики отличны от характеристик в D . Пусть под действием источников возникают колебания v , гармонические по времени. Пусть u - пространственная часть функции v , то есть $v = u(M)e^{i\omega t}$. Обозначим функцию u внутри D_i как u_i . На границе Σ_i областей D_i должны сопрягаться значения u и u_i , а также (с некоторыми коэффициентами) их нормальные производные. Например, пусть рассматриваются электромагнитные колебания, а v – потенциал электрического поля. Тогда при переходе через границу области остается непрерывным потенциал ($u|_{\Sigma_i} = u_i|_{\Sigma_i}$) и нормальная составляющая индукции электрического поля, равная $\varepsilon E_n = \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma_i}$. Следовательно, выполнено $\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma_i} = \varepsilon_i \frac{\partial u_i}{\partial n}|_{\Sigma_i}$.

Общая система для определения функций u_i состоит из уравнений Гельмгольца, условий на границах областей D_i и условий излучений:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u + k^2 u = f & \text{при } M \notin D_i \\ \Delta u_i + k^2 u_i = f_i & \text{при } M \in D_i \\ u|_{\Sigma_i} = u_i|_{\Sigma_i} \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma_i} = \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial n}|_{\Sigma_i} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right) \\ u = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right) \end{array} \right.$$


Другая задача – это поиск результата рассеяния на препятствиях падающей из бесконечности волны. Обозначим пространственную часть этой волны, как $u_0 = e^{ikx}$. Тогда имеем задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{при } M \notin D_i \\ \Delta u_i + k^2 u_i = 0 \quad \text{при } M \in D_i \\ (u_0 + u)|_{\Sigma_i} = u_i|_{\Sigma_i} \\ \alpha \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\Sigma_i} = \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial n} \Big|_{\Sigma_i} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o} \left(\frac{1}{r} \right) \\ u = \underline{O} \left(\frac{1}{r} \right) \end{array} \right.$$


Единственность решения задач в рассмотренных постановках доказывается, например, в учебнике [1].

Принцип предельного поглощения.

Условия Зоммерфельда можно использовать, если источник излучения находится в локализованной области. Если же источники или препятствия, от которых происходит отражение, уходят на бесконечность, то требуются другие принципы выделения единственного решения. Рассмотрим один из них – принцип предельного поглощения.

Вначале приведем наводящие соображения. Если происходит процесс колебаний с затуханием, то приходящие из бесконечности волны, чтобы дойти до области начала координат, должны иметь на бесконечности большую амплитуду. Поэтому, чтобы отсечь эту физически нереальную часть решения, достаточно наложить условие малости решения на бесконечности. Рассмотрим следующую задачу в неограниченной области. Пусть функция v является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \Delta v - F(M) e^{i\omega t}$$

Ищем решение задачи в виде $v = u(M) e^{i\omega t}$. Тогда получим:

$$\Delta u + \left(\frac{\omega^2}{a^2} - i \frac{\gamma \omega}{a^2} \right) u = \frac{F}{a^2}$$

Делая замену $k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}$, $\beta = \frac{\gamma \omega}{a^2}$ и $f = \frac{F}{a^2}$, имеем:

$$\Delta u + (k^2 - i\beta)u = f$$

Согласно сказанному, для выделения единственного решения достаточно потребовать, чтобы $u \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно относительно угла.

Теперь сформулируем принцип предельного поглощения.

Пусть требуется решить уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = f \tag{7}$$

где k - **вещественный** коэффициент. Пусть функция \bar{u} является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} + (k^2 - i\beta) \bar{u} = f \\ \bar{u} \rightarrow 0 \\ r \rightarrow \infty \end{cases} \tag{8}$$

Тогда, в качестве решения задачи (7) будем понимать функцию $u = \lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{u}$.

Проверим, что в случае, когда f финитная функция, принцип предельного поглощения выделяет то же решение, что и условия излучения Зоммерфельда.

Пусть $q = q_1 + iq_2$ - комплексное число, такое что $q^2 = k^2 - i\beta$. Тогда уравнение задачи (8) переписывается в виде:

$$\Delta \bar{u} + q^2 \bar{u} = f \quad (9)$$

Имеем: $q^2 = (q_1)^2 - (q_2)^2 + 2iq_1q_2 = k^2 - i\beta$. Отсюда:

$$\begin{cases} k^2 = (q_1)^2 - (q_2)^2 \\ \beta = -2q_1q_2 \end{cases}$$

Эта алгебраическая система сводится к биквадратному уравнению. Решая его и учитывая, что q_1 и q_2 вещественные числа, находим:

$$\begin{cases} q_1 = \pm \sqrt{\frac{k^2 + \sqrt{k^4 + \beta^2}}{2}} \\ q_2 = \mp \sqrt{\frac{\sqrt{k^4 + \beta^2} - k^2}{2}} \end{cases} \quad (10)$$

Решение (9) выписывается с помощью объемных потенциалов:

$$\bar{u}_{1,2} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{\pm i(q_1 + iq_2)R}}{R} f dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{\mp q_2 R} e^{\pm i q_1 R}}{R} f dV$$

Поскольку знак \pm присутствует как в последнем уравнении, так и в (10), то можно в (10) знак зафиксировать, считая $q_1 < 0$, $q_2 > 0$. Для выполнения условия $\bar{u} \rightarrow 0$ на бесконечности, необходимо в показателе экспоненты $e^{\mp q_2 R}$ выбрать знак $-$. Получаем, что решением задачи (8) будет функция

$$\bar{u} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{-q_2 R} e^{i q_1 R}}{R} f dV$$

Переходя к пределу при $\beta \rightarrow 0$ в (10) получаем:
 $\lim_{\beta \rightarrow 0} q_1 = -k$, $\lim_{\beta \rightarrow 0} q_2 = 0$. Следовательно, согласно принципу предельного поглощения, в качестве решения уравнения (7) мы должны выбрать
 $u = \lim_{\beta \rightarrow 0} \bar{u} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{-ikR}}{R} f dV$. Нетрудно проверить, что такое решение удовлетворяет условиям излучения $\frac{\partial u}{\partial r} + iku = \bar{o}\left(\frac{1}{r}\right)$, $u = \underline{O}\left(\frac{1}{r}\right)$.

Принцип парциального излучения

Условия Зоммерфельда или принцип предельного поглощения, нужные для выделения единственного решения, не удобны в использовании при численном расчете задачи с помощью компьютерной программы, поскольку требуется искать решение в бесконечном пространстве и определять его характер при $r \rightarrow \infty$. Рассмотрим принцип парциального излучения позволяющий, в определенных случаях, свести задачу к расчету в ограниченной области.

Задача в волноводе

Пусть в волноводе имеется вставка, в которой диэлектрическая проницаемость и проводимость отличны от остальной части волновода.

Электромагнитные колебания описываются уравнениями Максвелла:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j \\ \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \\ \operatorname{div} H = 0 \\ \operatorname{div} D = 4\pi \rho = 0 \\ j = \sigma E \\ D = \varepsilon E \end{array} \right.$$

Первое уравнение продифференцируем по времени и поделим на c . На второе уравнение подействуем оператором rot . Результат сложим. Получим следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -c (\operatorname{grad} \operatorname{div} E - \Delta E)$$

Полагая вектор \vec{E} - поляризованным, приходим к волновому уравнению с затуханием:

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} = \Delta E$$

Считая проводимость σ стенок волновода бесконечно высокой, а токи конечными, из соотношения $j = \sigma E$ получаем граничное условие: $E|_{\Sigma} = 0$, где Σ - поверхность волновода.

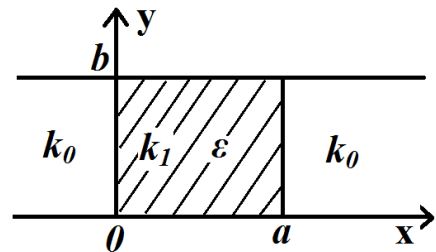
Решение E ищем в виде: $E = u(M) e^{-i\omega t}$. Тогда приходим к задаче для u :

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

где $k^2 = \bar{k}^2 + i\bar{k}^2$, $\bar{k}^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} > 0$ и

$\bar{k}^2 = \frac{4\pi\omega\sigma}{c^2} > 0$. Для простоты будем рассматривать двумерный по

пространственным координатам случай.



Тогда $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. В области вставки, заштрихованной на рисунке, $0 < x < a$ и $0 < y < b$.

Постановка парциальных условий излучения.

Волну вида $E = \psi(y)e^{i\gamma x}e^{-i\omega t}$ будем называть регулярной. Ей соответствует $u(M) = \psi(y)e^{i\gamma x}$. У движущихся слева направо регулярных волн $\text{Re } \gamma > 0$. У волн, движущихся в противоположном направлении, $\text{Re } \gamma < 0$. Подставляя амплитуду волны $u(M) = \psi(y)e^{i\gamma x}$ в систему (11), получим задачу Штурма-Лиувилля для нахождения функции $\psi(y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi + (k^2 - \gamma^2) \psi = 0 \\ \psi(0) = \psi(b) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Решая эту задачу, находим последовательность собственных значений и собственных функций $\gamma_n = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}$, $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{\pi n}{b} y\right)$, $n \in N$.

Заметим, что $\gamma_n^2 = k^2 - \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2$ лежит либо в первой, либо во второй четверти комплексной плоскости. Поэтому, извлекая квадратный корень, получаем, что само число γ_n лежит либо в первой, либо в третьей четверти комплексной плоскости. Таким образом, $\gamma_n = \gamma_n^1 + i\gamma_n^2$, где $\gamma_n^1 \gamma_n^2 > 0$. Будем выбирать из двух получившихся чисел γ_n такое, чтобы $\gamma_n^1 > 0$ и $\gamma_n^2 > 0$.

Пусть слева на вставку падает заданная регулярная волна, пространственная часть которой $u_0 = Ae^{i\gamma_{n_0} x} \psi_{n_0}(y)$. Требуется поставить задачу для u так, чтобы от вставки расходились отраженные волны, но не было других приходящих извне волн, кроме заданной. Условия, оставляющие только отраженные волны, были предложены А.Г. Свешниковым. Задача выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0 \\ u|_{y=0} = u|_{y=b} = 0 \\ \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n u \right) \Big|_{x=0} \psi_n(y) dy = 2iA\gamma_{n_0} \delta_{nn_0} \\ \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n u \right) \Big|_{x=a} \psi_n(y) dy = 0 \end{cases} \quad (13)$$

где $n \in \mathbb{N}$, а δ_{nn_0} - символ Кронекера.

Два последних соотношения в (13) называются парциальными условиями излучения. Первое из них отсекает все другие волны, движущиеся в сечении $x=0$ слева направо, кроме заданной падающей гармоники. Действительно, в этом уравнении для $u = C_n \psi_n(y) e^{i\gamma_n x}$, где $n \neq n_0$, подынтегральное выражение при $x=0$ равно $2C_n i\gamma_n \psi_n^2(y)$. Следовательно, интеграл будет равен нулю лишь при $C_n = 0$. Аналогично, последнее условие в (13) оставляет в сечении $x=a$ только волны, уходящие от вставки.

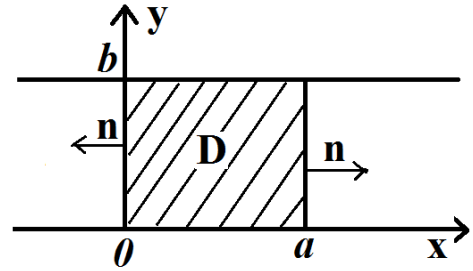
Покажем (взяв для простоты случай $\bar{k}_2^2 > 0$), что решение задачи (13) единственно. Действительно, пусть существуют два различных решения u_1 и u_2 . Тогда разность этих решений $w = u_1 - u_2$ будет удовлетворять однородной системе (13):

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0 \\ w|_{y=0} = w|_{y=b} = 0 \\ \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\gamma_n w \right) \Big|_{x=0} \psi_n(y) dy = 0 \\ \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\gamma_n w \right) \Big|_{x=a} \psi_n(y) dy = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Умножим первое уравнение (14) на комплексно-сопряженную к w функцию w^* , проинтегрируем по области D и применим первую формулу Грина:

$$0 = \int_D (\Delta w + k^2 w) w^* dV = \left(- \int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} dy + \int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} dy - \int_D |\nabla w|^2 dV \right) + \int_D k^2 |w|^2 dV \quad (15)$$

Знак «минус» в первом интеграле правой части (15) появился при учете направления нормали к поверхности (см. рисунок).



Так как ψ_n - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля (11), то они образуют полную систему функций.

Разложим по ним функцию w на границе области D : $w|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n$ и

$w|_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \psi_n$. Поскольку ψ_n вещественны, то $w^*|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \psi_n$ и

$w^*|_{x=a} = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^* \psi_n$.

Используя эти разложения и последние соотношения в (14), имеем:

$$\begin{aligned} & - \int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} dy + \int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} dy = - \sum_n C_n^* \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} \psi_n dy + \sum_n D_n^* \int_0^b \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} \psi_n dy = \\ & = - \sum_n C_n^* \int_0^b (-i w) \Big|_{x=0} \psi_n dy + \sum_n D_n^* \int_0^b (i w) \Big|_{x=a} \psi_n dy = \\ & = i \sum_n C_n^* \int_0^b \left(\sum_m C_m \psi_m \right) \gamma_n \psi_n dy + i \sum_n D_n^* \int_0^b \left(\sum_m D_m \psi_m \right) \gamma_n \psi_n dy \end{aligned}$$

Т.к. $\{\psi_n\}$ - ортонормированная система, то $\int_0^b \psi_m \psi_n dy = \delta_{nm}$. Имеем:

$$-\int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} dy + \int_0^b w^* \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} dy = i \sum_n \gamma_n |C_n|^2 + i \sum_n \gamma_n |D_n|^2$$

Используя полученное равенство, преобразуем (15). Получаем:

$$\int_D (\Delta w + k^2 w) w^* dV = \int_D (k^2 |w|^2 - |\nabla w|^2) dV + i \sum_n \gamma_n (|C_n|^2 + |D_n|^2) = 0$$

Приравнивая нулю мнимую часть, имеем

$$\int_D \left(\overset{=2}{k^2} |w|^2 \right) dV + \sum_n \gamma_n (|C_n|^2 + |D_n|^2) = 0$$

Откуда $w \equiv 0$, а значит, решение (13) единственно.

§6. Математические модели жидких вязких сред.

Силы, возникающие при движении жидкости, делятся на два основных типа: *массовые* и *поверхностные*. Силы, распределенные по объему и пропорциональные массам частиц, называются *массовыми* (напр. сила тяжести). Если \vec{F} - вектор массовой силы, отнесенный к единице массы, то на элемент объема $d\tau$ действует сила $\vec{F} \rho d\tau$, где ρ – плотность жидкости.

На элемент поверхности dS любого выделенного объема жидкости, по нормали к поверхности, действует сила давления $P_n = dS \cdot p$, где p давление. При движении *вязкой жидкости*, кроме того, действует касательная к поверхности составляющая, называемая *силой внутреннего трения (силой вязкости)*, которая проявляет себя в виде сопротивления жидкости процессу деформации.

Идеальной жидкостью называется жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения.

Основные уравнения.

Изменение массы жидкости в некотором объеме V происходит за счет выхода или входа потока $\rho \vec{v}_n$ через поверхность S . Отсюда

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} d\tau = - \int_S \rho \vec{v}_n d\sigma = - \int_V (\operatorname{div} \rho \vec{v}) d\tau$$

В силу произвольности объема V , получаем уравнение непрерывности

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (1)$$

В случае несжимаемой жидкости, при $\rho = \text{const}$, из (1) имеем:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (2)$$

Далее мы будем рассматривать изменение скорости потока. При этом справедливо соотношение:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \vec{e}_i v_i \right)$$

где v_i составляющая скорости в направлении \vec{e}_i . Следовательно

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \quad (3)$$

В случае идеальной (то есть невязкой) жидкости закон Ньютона для элементарного объема V имеет вид:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\tau = \int_V \rho F d\tau - \int_S \mathbf{n} p d\sigma = \int_V \rho F d\tau - \int_V \nabla p d\tau$$

В силу произвольности объема V , получаем

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \quad (4)$$

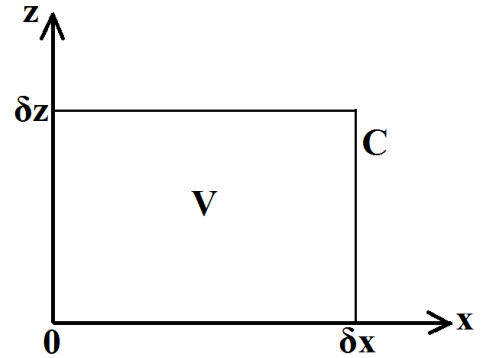
Это уравнение называется уравнением Эйлера. В случае, когда плотность жидкости меняется с давлением (баротропная среда), чтобы получить замкнутую систему, уравнение (4) нужно дополнить уравнением состояния $\rho = \Phi(p)$.

В случае вязкой среды в правую часть (4) добавляется слагаемое, учитывающее силу вязкого трения в жидкости. Для несжимаемых жидкостей, в случае, когда сила внутреннего трения пропорциональна разности скоростей слоев, между которыми возникает трение, движение жидкости описывается уравнением Навье – Стокса:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v} \quad (5)$$

где ν так называемый кинематический коэффициент вязкости. Он связан с коэффициентом вязкости μ соотношением $\nu = \mu / \rho$.

Поясним последнее слагаемое в (5). Рассмотрим для простоты двумерный случай. Выделим малую область с объемом V и границей C , как показано на рисунке. Составляющая величины $\int_V \mu \Delta \vec{v} dx dz$ в направлении \vec{e}_z равна:



$$\begin{aligned} \mu \int_V \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) dx dz &= \mu \int_C \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} dz - \frac{\partial v_z}{\partial z} dx \right) = \\ &= \int_0^{\delta z} \left(\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{x=\delta x} - \mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{x=0} \right) dz + \int_0^{\delta x} \left(\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{z=0} - \mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{x=\delta z} \right) dx \end{aligned} \quad (6)$$

Величины $\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{x=\delta x}$ и $\left(-\mu \frac{\partial v_z}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)$ определяют плотность силы

вязкости на границах $x = 0$ и $x = \delta x$ в направлении \vec{e}_z , а первый интеграл в правой части (6) суммарную силу вязкости на этих границах.

Если рассмотреть некоторый элемент раствора, то величина $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ описывает вытягивание элемента в направлении z (с одновременным сжатием в направлении x , в силу постоянства объема). Для преодоления сил вязкости при деформации элемента раствора нужно приложить внешнюю силу в направлении вытягивания. Считая эту силу равной $\mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$, получаем, что последний интеграл в (6) описывает силы, действующие на верхнюю и нижнюю границы элемента, изображенного на рисунке, в направлении \vec{e}_z . Поэтому $\int_V \mu \Delta v_z dx dz$ равен результирующей силе вязкости в направлении \vec{e}_z , действующей на часть раствора, заключенную в объеме V . Аналогичное соотношение имеет место по направлению \vec{e}_x . Таким образом, величина $\nu \Delta \vec{v}$ представляет собой плотность сил вязкости, деленную на ρ .

Условия, задаваемые на границах области, зависят от характеристик границы. Если жидкость граничит с неподвижной твердой стенкой S_T с уравнением поверхности $G(x, y, z) = 0$, то граничное условие имеет вид

$$v_n = (\vec{v}, \vec{n}) = 0, \quad \vec{r} \in S_T,$$

Если же стенка движется со скоростью \vec{v}_T , то нормальная составляющая скорости частиц жидкости в любой точке на поверхности должна равняться нормальной составляющей скорости движения поверхности:

$$(\vec{v}, \vec{n}) = (\vec{v}_T, \vec{n}), \quad \vec{r} \in S_T.$$

Если жидкость вязкая, то на поверхности S_T выполняется условие прилипания частиц жидкости к поверхности:

$$\vec{v} = \vec{v}_T, \quad \vec{r} \in S_T$$

Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением.

Пусть в горизонтальной цилиндрической трубе радиуса a происходит ламинарное (слоистое) движение вязкой несжимаемой жидкости в направлении оси Z совпадающей с осью трубы. Пусть в момент времени $t = 0$ жидкость покоилась, а при $t > 0$ на торцах трубы, при $z = 0$ и $z = L$, создается разность давлений δp . При продольном движении жидкости $v_x = v_y = 0$, $v = v_z$. В отсутствие сил тяжести при этом из уравнения Навье-Стокса следует, что $p = p(z)$. Получаем из (5):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v \quad (7)$$

Кроме того, при $v_x = v_y = 0$ из (2) имеем: $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$. Поскольку v не зависит от z , то (7) может быть выполнено лишь в случае, когда $\frac{\partial p}{\partial z}$ также не зависит от z , то есть $\frac{\partial p}{\partial z} = \text{const}$. Учитывая условия задачи, получаем $\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\delta p}{L}$. Обозначим $-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma$.

Вводя полярную систему координат и учитывая осевую симметрию решения, получаем задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} \gamma \quad (0 \leq r \leq a, \quad t \geq 0) \quad (8)$$

$$v(r, 0) = 0, \quad v(a, t) = 0$$

Решение задачи (8), очевидно, можно искать в виде суммы стационарного, не зависящего от времени, слагаемого $w(r)$ и добавки $u(r, t)$, описывающей переходной процесс от начального условия к стационарному процессу: $v(r, t) = u(r, t) + w(r)$

Для w имеем условия:

$$\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{\rho} \gamma = 0 \quad (0 \leq r \leq a)$$

$$w(r, 0) = 0$$

Решением этой задачи является функция:

$$w(r) = \frac{\gamma}{4\nu\rho} (a^2 - r^2) \quad (9)$$

Течение с профилем скорости (9) называется *плоскопараллельным течением Пуазейля*.

Для функции $u(r, t)$ получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \quad (0 \leq r < a, \quad t \geq 0)$$

$$u(a, t) = 0, \quad u(r, 0) = -\frac{\gamma}{4\rho\nu} (a^2 - r^2) \quad (10)$$

Задача (10), представляет собой задачу I-го рода с уравнением теплопроводности в круге. Ее решение можно найти, например, методом разделения переменных.

Внешняя задача гидродинамики.

Одной из основных проблем механики жидкостей является задача обтекания тела конечного размера однородным неограниченным потоком. Пусть S_T - поверхность тела, D_e - внешняя часть пространства по отношению к телу. Требуется найти решение системы (2), (5) соответствующее течению, переходящему на бесконечности в однородный поток, движущийся со скоростью U_∞ вдоль оси X . На бесконечности имеем условие

$$\vec{v} \rightarrow \vec{e}_x U_\infty, \quad \vec{r} \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Если жидкость вязкая, то на поверхности S_T выполняется условие прилипания частиц жидкости к поверхности:

$$\vec{v} = \vec{v}_T, \quad \vec{r} \in S_T, \quad t \geq t_0. \quad (12)$$

Если обтекаемое тело покоится, то, очевидно, справедливо граничное условие

$$\vec{v} = 0, \quad \vec{r} \in S_T, \quad t \geq t_0.$$

В уравнения (5) входят первые производные по времени. Поэтому следует задать начальное распределение скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_0(x, y, z), \quad \vec{r} \in S_T \cup D_e, \quad t = t_0. \quad (13)$$

Совокупность уравнений (2), (5), краевых условий (11), (12) и начальных условий (13) составляют нестационарную начально-краевую задачу об обтекании тела вязким потоком.

Распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении сферы.

Безвихревым или потенциальным движением называется движение, для которого выполнено условие $rot \vec{v} = 0$. Это является необходимым и достаточным условием существования потенциала скорости $\varphi(t, x, y, z)$, так что справедливо представление: $\vec{v} = grad \varphi$. Если жидкость несжимаема, то $div \vec{v} = 0$ и $\Delta \varphi = div grad \vec{v} = 0$. Функция $\varphi(t, x, y, z)$ является гармонической по пространственным переменным.

Определим распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении со скоростью $\vec{v}_0(t)$ сферы радиуса a , считая обтекание сферы потенциальным.

Так как движение потенциально и жидкость несжимаема, то потенциал ϕ вне сферы удовлетворяет уравнению Лапласа по пространственным переменным. Поскольку жидкость граничит с движущейся сферой, то нормальная составляющая скорости частиц жидкости на поверхности сферы равна нормальной составляющей скорости движения поверхности сферы S

$$(\vec{v}, \vec{n})|_S = (\text{grad}\phi, \vec{n})|_S = \frac{\partial\phi}{\partial n}|_S = (\vec{v}_0(t), \vec{n}).$$

На бесконечности выполняется условие:

$$\vec{v} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \vec{r} \rightarrow \infty.$$

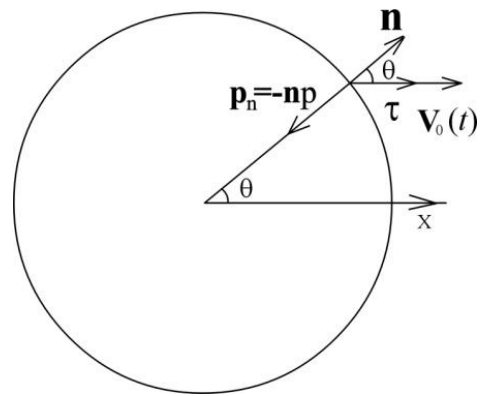
Значит

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \vec{r} \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для определения потенциала скорости в области D_e вне движущейся сферы имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= 0, \quad (x, y, z) \in D_e, \\ \frac{\partial\phi}{\partial n}|_S &= (\vec{v}_0(t), \vec{n}), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (x, y, z) \rightarrow \infty,$$



В эту задачу t входит как параметр.

Выберем сферическую систему координат (r, θ, λ) , $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$,

$0 \leq \lambda \leq 2\pi$ так, чтобы начало отсчета совпадало с центром сферы, а угол θ совпадал с углом между направлением движения сферы и направлением нормали к поверхности.

В каждый момент времени $t = t_0$ можно определить распределение скоростей в жидкости относительно этой системы координат, решив задачу (14) при фиксированном значении $t = t_0$. В выбранной системе координат система (14) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} &= 0, \quad (r, \theta, \lambda) \in D_e, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = v_0(t_0) \cos \theta, \quad 0 < \theta < \pi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} &\rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, решение этой задачи в любой момент времени t определено с точностью до константы. Поэтому φ определено с точностью до произвольной функции времени $C(t)$. Как известно из курса ММФ ограниченное на бесконечности решение задачи (15) имеет вид

$$\phi(r, \theta, \lambda, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{-(n+1)} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) + C(t_0).$$

Поскольку $P_1^0(\cos \theta) = P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, то граничное условие в (15) можно записать как

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = v_0(t_0) P_1^0(\cos \theta).$$

Отсюда ясно, что отличны от нуля только члены с $n = 1, m = 0$. Приравнивая соответствующие члены при $r = a$, находим коэффициент A_{10} .

Получаем $\phi(r, \theta, t_0) = -\frac{v_0(t_0)a^3}{2r^2} \cos \theta + C(t_0)$ для любого момента времени $t = t_0$.

Поскольку в сферической системе координат выражение для скорости имеет вид

$$\vec{v}(r, \theta, \lambda, t) = \vec{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \vec{e}_\lambda \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda},$$

где \vec{e}_r , \vec{e}_θ , \vec{e}_λ - орты сферической системы координат, то

$$\vec{v}(r, \theta, t) = \vec{e}_r \frac{v_0(t)a^3}{r^3} \cos \theta + \vec{e}_\theta \frac{v_0(t)a^3}{2r^3} \sin \theta.$$

Заметим, что потенциал скорости определен с точностью до произвольной функции времени, а распределение скоростей определяется однозначно.

Глава 2. Нелинейные процессы

В предыдущей главе изучались линейные задачи. Для них существуют общие методы решения. Для нелинейных задач ситуация гораздо сложнее. В нелинейном случае не действует принцип суперпозиции, поэтому нельзя искать решение в виде разложения по фундаментальной системе решений, нельзя использовать метод Фурье и т.д. Нелинейное уравнение в аналитическом виде решается лишь в отдельных частных случаях, поэтому обычно приходится решать задачу численно.

Нелинейные процессы имеют некоторые характерные черты, отличные от линейных случаев. Для этих задач возможно формирование крутых фронтов решений, возникновение разрывов, образование локальных структур и другие особенности. Эти черты мы проследим в последующем изложении.

§1. Квазилинейное уравнение переноса.

Уравнения в частных производных первого порядка часто встречаются в задачах, в которых рассматривается перенос вещества. Пусть, например, в направлении оси x переносится вещество, концентрация которого u . Перенос происходит со скоростью q , которая может зависеть от координат x , t и концентрации u . Последнее, например, имеет место в задаче расчета движения воды под действием силы тяжести в песке, где при малой влажности движения не происходит, а при большой скорости стекания существенна. Рассмотрим баланс вещества в слое от x до $x + \Delta x$ за время от t до $t + \Delta t$ (в единичном сечении перпендикулярном x). Поток вещества $Q = q \cdot u$. Имеем:

$$\int_x^{x+\Delta x} [u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t)] d\xi = \int_t^{t+\Delta t} [Q(x, \tau) - Q(x + \Delta x, \tau)] d\tau \quad (1)$$

Делим последнее уравнение на $\Delta x \Delta t$. Считая u и q непрерывно дифференцируемыми функцией своих переменных, перейдем к пределу при

$\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta t \rightarrow 0$. Получим дифференциальный аналог уравнения баланса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \text{ Если } q \text{ не зависит от } u, \text{ то, раскрывая производную } \frac{\partial Q}{\partial x},$$

приходим к линейному уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} + q \frac{\partial u}{\partial x} + gu = 0$, где $g = \frac{\partial q}{\partial x}$. Если q

зависит от u , то получаем квазилинейное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + gu = 0$, где

$$a = q + u \frac{\partial q}{\partial u} \text{ и } g \text{ зависят от } u.$$

Линейное уравнение.

Вначале кратко напомним некоторые результаты из курсе дифференциальных уравнений, относящиеся к линейным задачам переноса.

Рассмотрим в области D переменных x, y, t задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, t) \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y, t)u = f(x, y, t) \\ u|_{\Sigma} = \varphi(x, y, t) \end{cases} \quad (2)$$

где a, b, g и f непрерывно дифференцируемые функции, $a^2 + b^2 \neq 0$, Σ - кусочно-гладкая поверхность, лежащая в D . Для решения этой задачи составляются уравнения характеристик:

$$dt = \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} \quad (3)$$

Решения (3) называются характеристиками. Если рассмотреть характеристику, проходящую через точку (x_0, y_0, t_0) , то она удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= a(x, y, t) & x|_{t=t_0} &= x_0 \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= b(x, y, t) & y|_{t=t_0} &= y_0\end{aligned}\tag{4}$$

Характеристики являются кривыми в пространстве переменных (x, y, t) . При сделанных относительно a и b предположениях они заполняют собой всю область D , нигде не пересекаясь. Каждой из них можно приписать два параметра, определяющих выбор характеристики в трехмерном пространстве координат. Например, в качестве таких параметров можно выбрать значения x_0 и y_0 в (4). Кроме того, как известно, уравнения (3) имеют два первых интеграла, то есть такие функции $\Psi_{1,2}(x, y, t)$, которые сохраняют на решениях (3) постоянные значения. Для точек (x, y, t) , лежащих на фиксированной характеристике $\Psi_1 = C_1, \Psi_2 = C_2$. Поэтому имеется однозначное соответствие точек (x, y, t) и значений (C_1, C_2, t) . Последние можно выбрать, как новые координаты.

Фиксируем некоторую характеристику γ и посчитаем производную u по t вдоль нее. Используя (3), получим

$$\frac{du}{dt}|_{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y}. \text{ Следовательно, задача}$$

(2) в новых координатах имеет вид:

$$\begin{cases} \left(\frac{du}{dt} + gu = f \right) \Big|_{C_{1,2}=const} \\ u(M^*) = \varphi(M^*) \end{cases}\tag{5}$$

где M^* - точка пересечения выбранной характеристики с поверхностью Σ . Таким образом, задача свелась к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Решаем эту задачу, после этого делаем обратный переход к старым координатам и получаем решение задачи (2).

В случае, когда каждая характеристика в D пересекает поверхность Σ , причем только один раз, решение (5), а, следовательно, и (2) существует и единственно. Если какая-то характеристика не пересекает Σ , то решение на ней не единственно. Если характеристика пересекает Σ более одного раза, то решение (2) может не существовать.

Замечание 1. Если $g = f = 0$, то уравнение задачи (2), эквивалентно $\left(\frac{du}{dt} = 0 \right) \Big|_{C_{1,2} = \text{const}}$, то есть представляет собой закон сохранения u вдоль характеристики.

Замечание 2. В уравнении (2) присутствуют производные u по независимым переменным. Тем самым, под решением (2) понимается гладкая функция. После перехода к (5) требование непрерывности решения при переходе от одной характеристики к другой снимается. Если функция φ имеет разрывы, то можно рассматривать решения (5), как обобщенные решения (2), имеющие разрывы вдоль характеристик, проходящих через точки разрыва функции φ .

Квазилинейное уравнение.

Обратимся к задаче Коши для случая квазилинейного уравнения. Для простоты рисунков рассмотрим случай двух независимых переменных. Пусть кривая, на которой заданы дополнительные условия, определяется соотношением $\Phi(x, t) = 0$. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} = R(x, t, u) \\ u|_{\Phi(x, t)=0} = \varphi(x, t) \end{cases} \quad (6)$$

где функции $a(x, t, u)$ и $R(x, t, u)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями своих аргументов.

Будем искать решение этой задачи, полагая, что оно удовлетворяет уравнению

$$v(x, t, u) = 0 \quad (7)$$

где $v(x, t, u)$ некоторая, подлежащая определению, функция. При этом предполагаем, что $\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0$. Из (7), можно определить частные производные:

$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial t} / \frac{\partial v}{\partial u}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} / \frac{\partial v}{\partial u}$. Используя (6), получим задачу, которой удовлетворяет функция v .

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + a(x, t, u) \frac{\partial v}{\partial x} + R(x, t, u) \frac{\partial v}{\partial u} = 0 \\ v(x, t, \varphi(x, t))|_{\Phi(x, t)=0} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

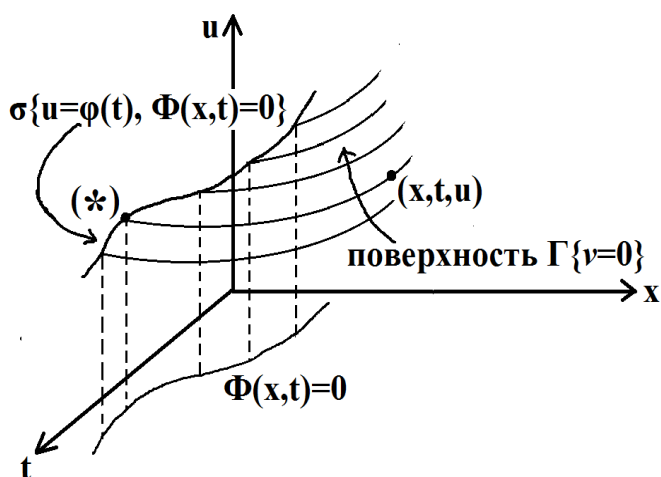
Уравнение задачи (8) является линейным относительно функции $v(x, t, u)$, поскольку коэффициенты $a(x, t, u)$ и $R(x, t, u)$ от нее не зависят. Соответствующие уравнения характеристик имеют вид:

$$dt = \frac{dx}{a(x, t, u)} = \frac{du}{R(x, t, u)} \quad (9)$$

В рассматриваемом случае характеристики являются кривыми в пространстве x, t, u , включающим в качестве координат не только независимые переменные x, t , но и u . Этим характеристики квазилинейного уравнения отличаются от линейного случая, где они были кривыми в пространстве только независимых переменных. Из (9) имеем два первых интеграла: $\Psi_1(x, t, u)$ и $\Psi_2(x, t, u)$.

Уравнение (8) выражает собой закон сохранения v вдоль характеристик.

Рассмотрим характеристики, на которых $v = 0$. Они образуют некоторую поверхность Γ в пространстве (x, t, u) . На этой поверхности лежит кривая σ , на которой заданы дополнительные значения, задаваемые вторым соотношением в (8). На σ точки (x, t, u) связаны условиями: $\Phi(x, t) = 0$, $u = \varphi(x, t)$.



Выберем произвольную точку (x, t, u) на поверхности Γ . Проведем через эту точку характеристику до пересечения кривой σ . Обозначим точку пересечения, как (x^*, t^*, u^*) . Значение $u^* = \varphi(x^*, t^*)$. Поскольку первые интегралы сохраняют свои значения на характеристиках, то получаем:

$$\begin{cases} \Psi_1(x, t, u) = \Psi_1(x^*, t^*, \varphi(x^*, t^*)) \\ \Psi_2(x, t, u) = \Psi_2(x^*, t^*, \varphi(x^*, t^*)) \\ \Phi(x^*, t^*) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Исключая x^* и t^* из этой системы, получаем алгебраическое соотношение, связывающее u , x , t между собой, т.е. решение задачи (6).

Метод характеристик.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x) \end{cases} \quad (11)$$

Пусть \bar{u} некоторое решение уравнения (11). Зафиксируем его. Тогда a представляет собой определенную функцию от x и t :

$a = a(x, t, \bar{u}(x, t)) = \bar{a}(x, t)$. Рассмотрим решение линейного уравнения $u_t + \bar{a}(x, t)u_x = 0$. Согласно *замечанию 1* любое решение u такого уравнения сохраняется на кривых, удовлетворяющих соотношению $dt = \frac{dx}{a}$.

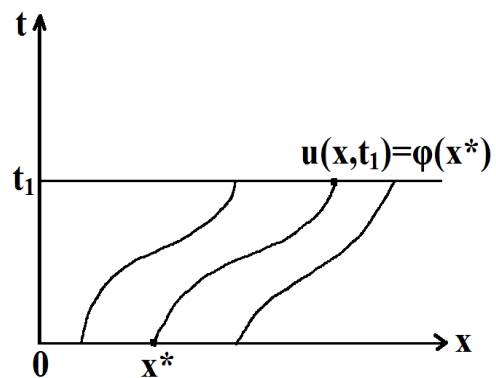
В том числе, сохраняется и \bar{u} . Поскольку в качестве \bar{u} можно выбрать любое решения уравнения (11), то получаем, что любое решение u постоянно на кривой $\frac{dx}{dt} = a(x, t, u)$.

Выберем некоторое x^* . Согласно (11) $u(x^*, 0) = \phi(x^*)$. Учитывая сказанное, получаем, что u постоянно и равно $\phi(x^*)$ на кривой

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t, \phi(x^*)) \quad x|_{t=0} = x^* \quad (12)$$

В случае, когда $a = a(u)$ из (12) получаем $u(x, t) = \phi(x^*)$ для $x = x^* + a(\phi(x^*))t$.

Итак, метод характеристик заключается в следующем. Для построения решения задачи (11) при некотором $t_1 > 0$ нужно через различные точки x^* , лежащие на прямой $t = 0$ провести кривые, удовлетворяющие (12), до пересечения с прямой $t = t_1$. В точках пересечения значения $u(x, t_1) = \phi(x^*)$.



Заметим, что уравнение задачи (11) является квазилинейным уравнением. Его характеристики – кривые в пространстве (x, t, u) – определяется условиями:

$$dt = \frac{dx}{a(x, t, u)}, \quad u = \text{const}$$

Разрывы решения.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Пусть мы решаем задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x) \end{cases} \quad (13)$$

где ϕ - монотонно убывающая функция x , а a монотонно растущая функция u . Согласно (12) проекции характеристик квазилинейного уравнения (13)

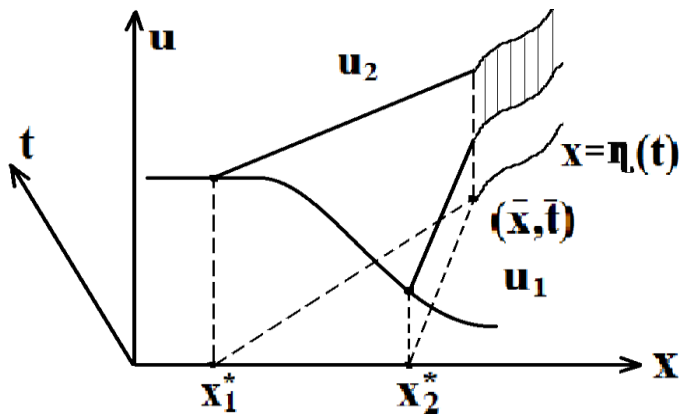
имеют наклон: $\frac{dx}{dt} = a(\phi(x^*))$, где

x^* координата пересечения проекции с осью $t=0$. При указанном характере изменения ϕ

и a значение $\frac{dx}{dt}$ тем меньше, чем

больше x^* . Это означает, что при

некотором \bar{t} наступит пересечение проекции характеристик (См. рис).



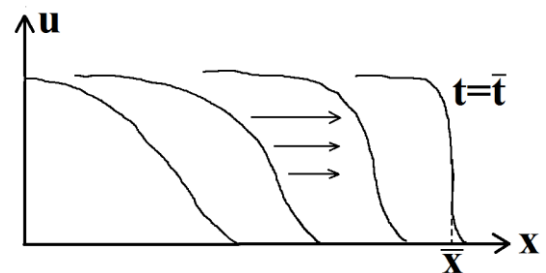
Пусть в точке (\bar{x}, \bar{t}) пересеклись проекции характеристик, на которых $u = u_1 = \phi(x_1^*)$ и $u = u_2 = \phi(x_2^*)$. (Характеристики прошли «на разной высоте u » над плоскостью координат (x, t) в трехмерном пространстве (x, t, u)).

Тогда, согласно (7), $v(\bar{x}, \bar{t}, u_1) = v(\bar{x}, \bar{t}, u_2) = 0$. Это означает, что при

некотором $u_3 \in (u_1, u_2)$ будет нарушено условие $\frac{\partial v}{\partial u}(\bar{x}, \bar{t}, u_3) \neq 0$, используя которое строился метод решения задачи (6).

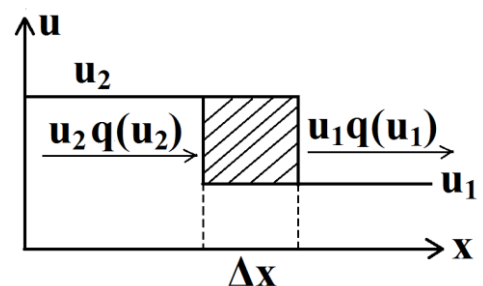
Рассмотренная ситуация типична для квазилинейных уравнений. Для таких уравнений производная $\frac{dx}{dt}$ на характеристиках зависит не только от выбора точки (x, t) , как в случае линейных уравнений, но и от решения u на рассматриваемой характеристике. Поэтому проекции характеристик на плоскость (x, t) могут пересекаться.

На следующем рисунке показано изменение профиля решения (13) от x для различных моментов t . Чем больше u , тем с большей скоростью происходит перемещение этого значения вдоль x . В момент \bar{t} в точке \bar{x} фронт становится отвесным – происходит образование разрыва решения и ударной волны.



При $t > \bar{t}$ классического решения, всюду гладкого по x , не существует. Следует рассматривать так называемое обобщенное решение. Обобщенное решение при $t > \bar{t}$ представляет собой классические решения, прилегающие с двух сторон к некоторой кривой разрыва решения $x = \eta(t)$. Кривая $x = \eta(t)$ определяется законом сохранения (1), на базе которого получено дифференциальное уравнение (13).

А именно, пусть разрыв, на одном берегу которого $u = u_1$, а на другом $u = u_2$, за время Δt продвинулся на Δx . Тогда изменение количества вещества (заштрихованная зона на рисунке) равно разности входящего и выходящего потоков:

$$(u_2 - u_1)\Delta x = (q(u_2)u_2 - q(u_1)u_1)\Delta t.$$


Отсюда скорость движения разрыва $v_{разр} = \frac{d\eta}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ задается уравнением:

$$v_{разр} = \frac{q(u_2)u_2 - q(u_1)u_1}{u_2 - u_1} \quad (14)$$

Последнее уравнение называется условием Гюгонио. Оно выражает собой условие сохранения вещества на фронте ударной волны.

Пример.

Рассмотрим методологию решения задачи на примере задачи о протекании воды сквозь песок. Пусть x - вертикальная координата, возрастающая вниз; t - время; $u(x, t)$ - влажность песка; q - скорость стекания воды под действием силы тяжести. Скорость q зависит от влажности. Пусть $q = \frac{u}{2}$, а влажность u меняется от нуля до некоторого максимального значения u_{\max} , которое определяется пористостью песка. Для гладкой функции $u(x, t)$ соотношение баланса количества воды (1), приводит к дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(q(u)u) = 0$$

С учетом конкретного вида функции $q(u)$ получаем квазилинейное уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (15)$$

Рассмотрим задачу на бесконечном участке $-\infty < x < \infty$. Пусть в начальный момент времени

$$u(x,0) = \phi(x) = \begin{cases} 2, & \text{при } x \leq 0 \\ 2-x, & \text{при } 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{при } x \geq 1 \end{cases} \quad (16)$$

Требуется найти решение задачи (15), (16) при $t > 0$.

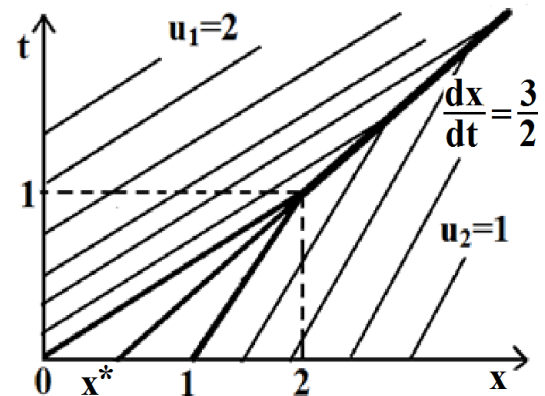
Решим поставленную задачу. Для классического решения наклон проекции характеристик на плоскость (x,t) определяется соотношениями (12). В рассматриваемом примере имеем: $u(x,t) = \phi(x^*)$ для $x = x^* + \phi(x^*)t$.

Отсюда

$$\begin{aligned} u &= 2, & x - x^* &= 2t & \text{при } x^* < 0 \\ u &= 2 - x^*, & x - x^* &= (2 - x^*)t & \text{при } 0 \leq x^* \leq 1 \\ u &= 1, & x - x^* &= t & \text{при } 1 < x^* \end{aligned} \quad (17)$$

При $t = 1$ все проекции характеристик, для которых $0 \leq x^* \leq 1$ сходятся в точке $x = 2$. При $t > 1$ мы должны искать обобщенное решение, состоящее из двух классических, сшитых по линии разрыва $x = \eta(t)$. Линия разрыва начинается в точке $(t=1, x=2)$ и определяется условием Гюгонио (14):

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{(u_2/2) \cdot u_2 - (u_1/2) \cdot u_1}{u_2 - u_1} = \frac{u_2 + u_1}{2} = \frac{3}{2}$$



Проекция характеристик сходятся с двух сторон к линии разрыва решения.

§2. Нелинейное уравнение теплопроводности.

В курсе ММФ изучалась задача Коши для уравнения теплопроводности с постоянным коэффициентом a :

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (1)$$

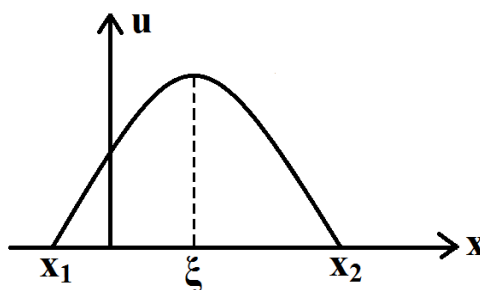
Была построена функция влияния точечного источника

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{at}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \quad \text{и} \quad \text{получено} \quad \text{решение:}$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \cdot G(x, \xi, t) d\xi.$$

Как известно, функция G описывает температуру в точке x , если в точке ξ в момент $t = 0$ был произведен нагрев. Видно, что $G > 0$ даже при малых $t > 0$ сразу для всех ξ и x . Это нереально с точки зрения физики, поскольку процесс распространения тепла в природе идет с конечной скоростью, вследствие конечной скорости движения молекул. Этот фактор не отражен в модели (1) – модель рассчитана на описание процессов теплопередачи в пространственно - временных масштабах, в которых ограниченностью скорости передачи тепла можно пренебречь.

Но возникает следующий вопрос. Решение было построено в предположении наличия непрерывных производных по x . Может быть это было сделано «в угоду математике», а на самом деле можно было бы искать финитное решение, с разрывной производной, отличное от нуля лишь в некоторой расширяющейся со временем окрестности точки ξ , в которой был произведен нагрев. А именно, в виде, изображенном на рисунке. Легко убедиться, что это не так. Действительно,



поток тепла $q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$. Поэтому в точках x_1 и x_1 на рисунке нарушено физическое условие непрерывности теплового потока. В силу этого условия, в задаче (1) нельзя искать решение, имеющее разрыв производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $t > 0$.

Ситуация меняется если рассматривать задачу с нелинейным уравнением $u_t = (k(u)u_x)_x$, где $k(u) = 0$ при $u = 0$. В этом случае разрыва теплового потока в точках x_1 и x_1 , изображенных на рисунке не происходит. С обеих сторон этих точек предельное значение потока $q = -k(u) \frac{\partial u}{\partial x}$ равно нулю.

Следовательно, в случае указанного нелинейного уравнения можно искать финитные решения, что будет продемонстрировано в последующих пунктах.

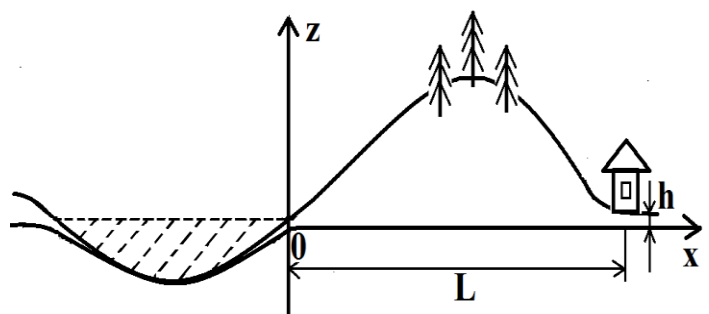
Уравнение Буссинеска. Задача о наводнении.

Рассмотрим такую задачу. Пусть имеется озеро и деревня, так как изображено на рисунке. Под ними расположен гидроупорный слой (глина), показанный жирной линией.

Пусть $u(x, t)$ - уровень грунтовой воды над гидроупором в области $x > 0$.

Пусть весной, к моменту $t = 0$ вода в озере поднялась до нулевой отметки и продолжает

прибывать по закону $u(0, t) = kt$. Ставится вопрос о том, как быстро затопление дойдет до деревни, расположенной на высоте h над гидроупором и имеющей координату $x = L$.

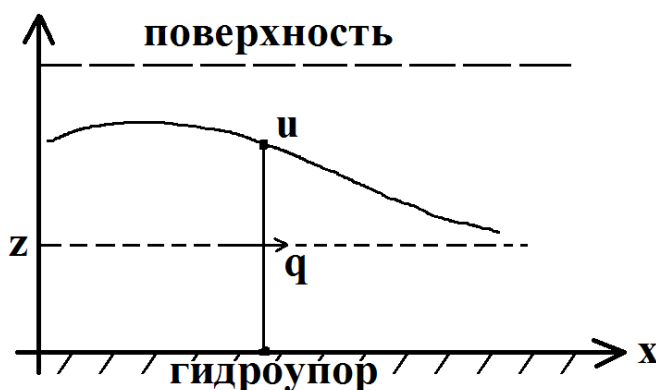


Сначала получим уравнение, описывающее изменение u . Рассмотрим вертикальное сечение земли от дневной поверхности до гидроупора. Плотность горизонтального потока

воды равна $q = -D \frac{\partial P}{\partial x}$, где P –

давление, а D – коэффициент проводимости среды. Рассмотрим некоторую высоту $0 < z < u$.

Давление на этой высоте равно $P(z) = \rho g(u - z)$ где, ρ –



плотность воды, а g – ускорение свободного падения. Следовательно,

$q = -D \rho g \frac{\partial u}{\partial x}$ и от z не зависит. Поэтому полный поток, идущий через

сечение будет равен $Q = -D \rho g \cdot u \frac{\partial u}{\partial x}$. Интегральное уравнение баланса

воды в слое от x до $x + \Delta x$ за время от t до $t + \Delta t$ будет:

$$\int_x^{x+\Delta x} \varepsilon \cdot (u(\xi, t + \Delta t) - u(\xi, t)) d\xi = \int_t^{t+\Delta t} D \rho g \cdot \left(u(x, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, \tau + \Delta \tau)}{\partial x} u(x, \tau + \Delta \tau) \right) d\tau$$

где ε – порозность среды. Делим уравнение на Δx и Δt и устремляем их к нулю. Получаем дифференциальное уравнение, описывающее высоту уровня грунтовой воды над гидроупором, называемое уравнением Буссинеска:

$$u_t = \frac{D \rho g}{\varepsilon} (u u_x)_x$$

Сделаем замену переменной $\tau = \frac{\varepsilon}{D \rho g} t$, (т.е. введем новый масштаб

времени). Обозначаем $\frac{k \varepsilon}{\rho g D}$, как K . Получаем математическая модель

процесса:

$$\begin{cases} u_{\tau} = (uu_x)_x \\ u(x, 0) = 0 \\ u(0, \tau) = K\tau \end{cases} \quad (2)$$

Согласно предыдущему пункту, мы имеем право искать решение, имеющее перелом производной при $u = 0$. Ищем решение задачи (2) в автомодельном виде движущейся волны

$$\begin{cases} u = f(v\tau - x) & \text{при } v\tau - x > 0, \\ u = 0 & \text{при } v\tau - x \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

где v постоянная скорость, подлежащая определению. Подставив такой вид решения в (2), получаем уравнение в обыкновенных производных для определения функции $f(\alpha)$, где $\alpha = v\tau - x$:

$$vf' = (ff')'$$

Интегрируем это уравнение от нуля до некоторого $\alpha < 0$. Имеем: $vf = ff'$. Откуда $f' = v$. Из граничного условия задачи (2), находим функциональный вид f : $u(0, \tau) = K\tau = f(v\tau - 0)$. Отсюда $f(\alpha) = \frac{K\alpha}{v}$.

Используя равенство $f' = v$, имеем: $\frac{K}{v} = v$. Следовательно $v = \sqrt{K}$, а $f(\alpha) = \alpha\sqrt{K}$. Получаем решение задачи (2):

$$\begin{cases} u(x, \tau) = K\tau - \sqrt{K}x & \text{при } x < \sqrt{K}\tau \\ u(x, \tau) = 0 & \text{при } x \geq \sqrt{K}\tau \end{cases}$$

Наводнение дойдет до деревни при τ , которое определяется равенством $h = K\tau - \sqrt{K}L$.

Нелинейная модель горения.

Часто мощность источников тепла зависит от температуры. Например, в плохо горящем костре выделение тепла дровами слабое, а когда костер разгорится, то те же дрова выделяют много энергии. Передача тепла часто имеет конвективный характер. При этом коэффициент теплопроводности зависит от интенсивности конвективных процессов - тем самым от температуры.

$$\text{Рассмотрим уравнение } u_t = \left(u^2 u_x\right)_x + u^\beta \quad (4)$$

Будем искать автомодельные решения этого уравнения для разных значений параметра β .

1) Пусть $\beta = 3$

В этом случае уравнение (4) заменой $u(x, t) = \frac{\theta(x)}{\sqrt{T-t}}$ приводится к уравнению в обыкновенных производных: $\theta\theta'' + 2\theta'^2 + \theta^2 = 1/2$. Его решением является функция $\theta(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$. Обозначим $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$, как x_0 .

Получаем, что решением задачи:

$$\begin{cases} u_t = \left(u^2 u_x\right)_x + u^3 \\ u(x, 0) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{T}} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) & \text{при } |x| \leq x_0 \\ 0 & \text{при } |x| > x_0 \end{cases} \end{cases}$$

является функция:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\cos\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{T-t}}, & \text{при } |x| \leq x_0 \\ 0, & \text{при } |x| > x_0 \end{cases} \quad (5)$$

Выражение (5) описывает структуру фиксированной ширины, величина которой бесконечно возрастает за конечное время. Решения, обладающие последним свойством, называются решениями с обострением.

2) Пусть $\beta = 2$

В этом случае сделаем другую замену, а именно $u(x, t) = \frac{\theta(\xi)}{T-t}$, где $\xi = x\sqrt{T-t}$. Такая замена приводит уравнение (4) к уравнению в обыкновенных производных.

$$\left(\theta^2 \theta'\right)' + \theta^2 + \frac{\theta' \xi}{2} - \theta = 0 \quad (6)$$

Из (6) видно, что функция $\theta(\xi)$ является четной, поэтому $\theta'(0) = 0$.

При $\xi = 0$ уравнение (6) преобразуется к виду: $\theta^2 \theta'' + \theta^2 - \theta = 0$. Выбрав $\theta(0) > 1$, получаем, что вторая производная $\theta''(0)$ отрицательна, следовательно, в точке $\xi = 0$ расположен максимум.

Существует решение $\theta(\xi)$, удовлетворяющее уравнению (6), положительное на некотором интервале $(\xi_0, -\xi_0)$ и равное нулю при $\xi = \xi_0$. Само решение и значение ξ_0 можно найти численно.

При $\theta \rightarrow 0$, пренебрегая в (6) малыми членами, имеем: $2\theta\theta' + \frac{\xi}{2} \approx 0$.

Решение последнего уравнения ведет себя, как $\theta(\xi) = \frac{1}{2} \sqrt{\xi_0^2 - \xi^2}$.

Следовательно, $\theta'(\xi_0 - 0) < 0$.

Строим решение $u(x, t) = \frac{\theta(x\sqrt{T-t})}{T-t}$, где $\theta(\xi)$ определяется на интервале $(\xi_0, -\xi_0)$ из (6) и $\theta(\xi) \equiv 0$ при $\xi > \xi_0$. Такая функция $u(x, t)$ имеет разрыв производной по x в точке $x = \frac{\xi_0}{\sqrt{T-t}}$, где решение обращается в ноль.

Найденное решение, образует локальную структуру, которая расширяется пропорционально $\frac{1}{\sqrt{T-t}}$, и неограниченно возрастает в центре за конечное время.

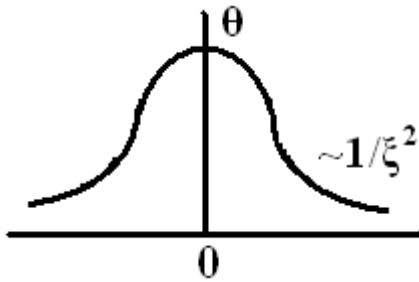
3) Пусть $\beta = 4$

В этом случае сделаем замену $u(x, t) = \frac{\theta(\xi)}{(T-t)^{1/3}}$, где $\xi = \frac{x}{(T-t)^{1/6}}$.

При этом уравнение (4) преобразуется к виду:

$$(\theta^2 \theta')' + \theta^4 = \frac{\theta' \xi}{6} + \frac{1}{3} \theta$$

Качественный вид решения этого уравнения представлен на рисунке.



Имеем нелокальный процесс с обострением в центре структуры. Можно показать, что при $x \neq 0$ решение растет, оставаясь конечным.

Модель большого взрыва.

Баренблаттом и Зельдовичем была рассмотрена и исследована следующая, одномерная по пространственным координатам, модель большого взрыва,

положившего начало движения вещества во вселенной. Пусть в начальный момент времени масса вселенной M была сосредоточена в одной точке $x = 0$. Распространение вещества после взрыва авторы описали моделью:

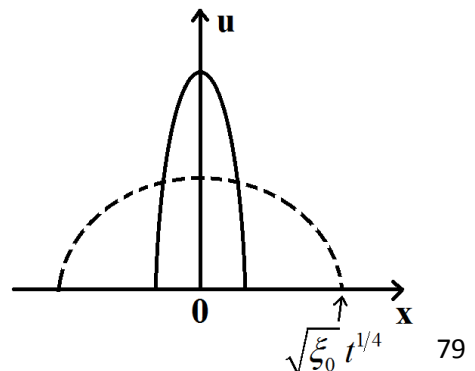
$$\begin{cases} u_t = (u^2 u_x)_x \\ u(0, x) = \delta(x)M \end{cases} \quad (7)$$

Сделаем замену координат $\xi = \frac{x^2}{\sqrt{t}}$ и будем искать решение в автомодельном виде: $u(x, t) = \frac{\theta(\xi)}{t^{1/4}}$, где $\theta(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция. Нетрудно проверить, что для такого u , при любом выборе $\theta(\xi)$, выполнено: $u_t = \left(-u \frac{x}{4t}\right)_x$. Уравнение (7) приводится к виду: $\left(-u \frac{x}{4t}\right)_x = (u^2 u_x)_x$. Интегрируя это уравнение по x , используя искомый вид u , получаем: $-\frac{\theta}{t^{1/4}} \frac{x}{4t} = \frac{2x}{t^{5/4}} \theta^2 \theta'$. Отсюда $8\theta\theta' = -1$.

Ищем решение последнего уравнения в виде финитной функции, имеющей разрыв производной при $\theta = 0$. Таким решением является функция $\theta(\xi) = \max\left[\frac{1}{2}\sqrt{\xi_0 - \xi}, 0\right]$.

Мы получили следующее решение задачи (7):

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\xi_0 - \frac{x^2}{\sqrt{t}}}}{t^{1/4}}, & \text{при } |x| < \sqrt{\xi_0} t^{1/4} \\ 0, & \text{при } |x| > \sqrt{\xi_0} t^{1/4} \end{cases}$$



где ξ_0 - величина, определяющая границу возмущения. Ее можно определить из второго уравнения системы (7). Условие нормировки будет:

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = 2 \int_0^{\sqrt{\xi_0} t^{1/4}} \frac{\theta}{t^{1/4}} dx = 2 \int_0^{\sqrt{\xi_0}} \frac{\sqrt{\xi_0 - \xi} / 2}{t^{1/4}} d(t^{1/4} \sqrt{\xi}) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\xi_0} \frac{\sqrt{\xi_0 - \xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi = \frac{\sqrt{\xi_0}}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\sqrt{\alpha}} d\alpha = \sqrt{\xi_0} \frac{3\pi}{8}.$$

Отсюда находим ξ_0 , тем самым решение полностью определено.

§3. Модель «Хищник-Жертва»

Рассмотрим модель Вольтера для задачи «хищник-жертва». Пусть x - число зайцев, а y - число волков. Изменение числа зайцев во времени происходит за счет двух факторов – рождения новых зайцев, что пропорционально количеству живущих зайцев, и смерти за счет встречи с волками. Количество встреч пропорционально произведению числа зайцев и волков. Соответственно, волкам для увеличения популяции и вскармливания молодого поколения требуется пища. Будем считать прирост количества волков пропорциональным количеству встреч их с зайцами. Кроме того, имеет место естественная убыль волков от старости и голода, которая тем больше, чем больше количество волков. Получаем модель:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_1 x - k_2 xy & x(t_0) = x_0 \\ \frac{dy}{dt} = k_3 xy - k_4 y & y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (9)$$

Исследуем решение (9). Поделив первое уравнение системы (9) на второе, получим:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x(k_1 - k_2 y)}{y(k_3 x - k_4)}$$

Иначе:

$$\frac{dx(k_3x - k_4)}{x} = \frac{dy(k_1 - k_2y)}{y}$$

Это уравнение с разделенными переменными. Решая его, получим:

$$\frac{e^{k_3x}}{x^{k_4}} \cdot \frac{e^{k_2y}}{y^{k_1}} = C \quad (10)$$

Здесь C – интеграл движения, то есть величина сохраняющее значение на решении уравнений (9). Условие $C = const$ определяет линию уровня интегральной кривой в пространстве (x, y, C) .

Приравняв нулю правые части уравнений системы (9), можно найти точку покоя (x_n, y_n) . Имеем:

$$x_n = k_4 / k_3, \quad y_n = k_1 / k_2$$

Подставляя эти координаты в (10), находим значение интеграла движения, соответствующее точке покоя:

$$C_n = \frac{e^{k_3x_n}}{(x_n)^{k_4}} \frac{e^{k_2y_n}}{(y_n)^{k_1}}$$

Рассмотрим функции $f(x) = \frac{e^{k_3x}}{x^{k_4}}$ и $g(y) = \frac{e^{k_2y}}{y^{k_1}}$. Легко видеть, что функция f

неограниченно возрастает при $x \rightarrow 0$ и $x \rightarrow \infty$. Вычислим ее производную:

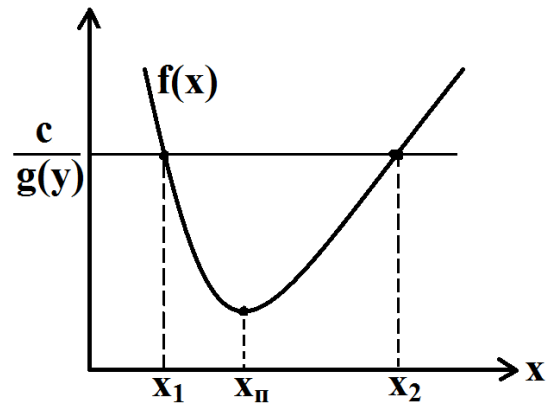
$\frac{df}{dx} = f \cdot \left(k_3 - \frac{k_4}{x} \right)$. Отсюда следует, что f растет при $x > x_n$ и убывает при

$x < x_n$. Тем самым ее минимум достигается при $x = x_n$. Аналогично ведет

себя функция $g(y)$. Она имеет минимум при $y = y_n$. Поэтому поверхность

$C(x, y) = f(x)g(y)$ имеет характер прогнутой поверхности, имеющей минимум в точке покоя и бесконечно возрастающую к границам первого квадранта и бесконечности на плоскости (x, y) .

Фиксируем произвольное значение $C > C_n$ и произвольное y , лежащее на линии уровня $C = const$. Значения x , соответствующие выбранному C и y , определяются условием $f(x) = C / g(y)$. Учитывая характер функции $f(x)$, показанный на рисунке, видим, что имеются два таких значения x . Таким образом, при $C > C_n$ каждому y соответствуют два значения x лежащему на линии уровня $C = const$. Аналогично, каждому x , лежащему на линии уровня соответствуют два y .

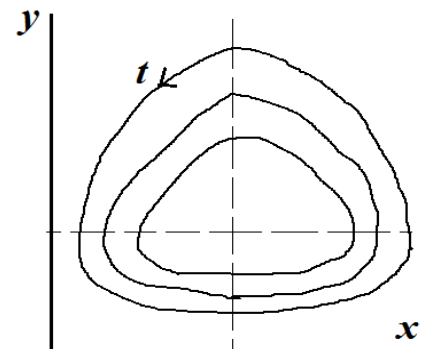


При $C > C_n$ получаем замкнутые линии уровня, лежащие в области $x > 0$, $y > 0$. Отсюда, если начальная точка (x_0, y_0) лежит в первом квадранте, то фазовая траектория не покидает первого квадранта, т.е. $x(t) > 0$ и $y(t) > 0$ в любой момент времени.

Если начальная точка не совпадает с точкой покоя, то из (9) следует, что либо $\frac{\partial x}{\partial t} \neq 0$, либо $\frac{\partial y}{\partial t} \neq 0$. Иными словами $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \neq 0$.

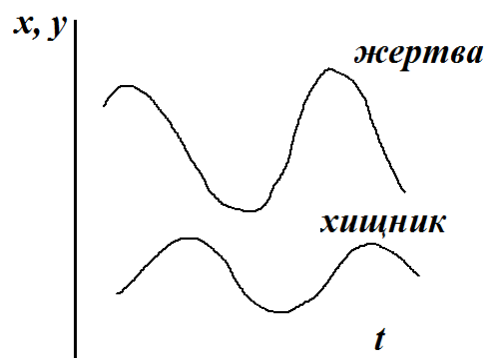
Получаем непрерывное движение.

Направление движения на фазовой плоскости можно определить по нижней точке фазовой кривой, соответствующей $x = x_n$. При этом $\frac{\partial y}{\partial t} = 0$, а $\frac{\partial x}{\partial t} = x_n(k_1 - k_2 y) > 0$, что задает направление обхода против часовой стрелки.



Вид интегральных кривых показан на следующем рисунке.

Рассмотренная задача служит примером того, как в системе, описываемой нелинейными уравнениями, может возникнуть взаимодействие факторов, приводящее к возникновению устойчивой структуры решения. В данном случае, к появлению устойчивого циклического процесса.



Литература.

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва, 1977.
2. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике, Москва, 1993.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы: учебное пособие, СПб, 2011.
4. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения, Москва, 1980.
5. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры, Москва, 2002.
6. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование, Москва, 2002.



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М.В.Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Тихонов Н.А., Токмачев М.Г.

Курс лекций

«ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

ЧАСТЬ 2

Москва, 2012

ТИХОНОВ Н.А., ТОКМАЧЕВ М.Г.

Основы математического моделирования / Учебное пособие.

М.: Физический факультет МГУ, 2012.

Пособие по курсу «основы математического моделирования» написано на основе курса лекций, читаемого в течение ряда последних лет на физическом факультете МГУ.

В пособии рассматриваются вопросы и методы математического моделирования, а также постановки и решения ряда классических и новых задач математической физики.

Текст разбит на главы и параграфы. Нумерация формул и рисунков в каждом параграфе своя. Рисункам присвоены номера в тех случаях, когда на них имеются последующие ссылки. В остальных случаях рисунки иллюстрируют рядом расположенный текст и не пронумерованы.

Тихонов Николай Андреевич

Токмачев Михаил Геннадьевич

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова,
119991, Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, д.1, стр.2

© Физический факультет МГУ
им. М.В.Ломоносова, 2012

© Тихонов Н.А.,
Токмачев М.Г., 2012

Оглавление

Глава 3. Методы решения задач.	5
I. Метод конечных разностей.	5
§1. Общие понятия.	5
§2. Разностные задачи для уравнения теплопроводности.	7
Устойчивость решения задачи теплопроводности на бесконечной прямой.	10
Необходимые условия. Спектральный метод.	10
Достаточные условия устойчивости.	11
§3. Метод прогонки для решения задачи теплопроводности на отрезке.	14
§4. Консервативные разностные схемы.	16
Пример неконсервативной схемы.	17
Метод баланса при составлении разностных схем для уравнения теплопроводности.	20
Консервативная разностная схема для решения задачи (1), (2).	22
§5. Экономичные разностные схемы.	23
Схема переменных направлений	23
Локально-одномерная схема.	26
§6. Итерационные методы при решении нелинейных уравнений.	28
§7. Разностные схемы для решения уравнение переноса.	30
Геометрический критерий устойчивости схемы бегущего счета	34
II. Вариационные и проекционные методы решения краевых задач.	37
§1. Сведение дифференциальной задачи к вариационной. Метод Рунца	37
§2. Проекционные методы	42
Метод Галеркина.	42
Метод наименьших квадратов.	42
Метод моментов	43
Обобщенный метод моментов	44
§3. Разностные схемы для уравнений с разрывными коэффициентами, основанные на вариационных принципах. Метод конечных элементов.	44
§4. Вариационный подход к решению задачи Штурма-Лиувилля.	48
III. Асимптотические методы.	49

§1. Метод малого параметра. _____	49
Регулярный случай. _____	50
Случай сингулярного возмущения. _____	52
<i>Построение равномерной асимптотики.</i> _____	54
Формализм метода. _____	60
<i>Первое приближение:</i> _____	63
<i>Улучшенное первое приближение:</i> _____	64
<i>Второе приближение:</i> _____	64
<i>Улучшенное второе приближение:</i> _____	65
§3. Метод ВКБ (Венцеля, Крамерса и Бриллюэна) _____	71
<i>Глава 4. Некоторые новые объекты математического моделирования</i>	74
§1. Вейвлет-анализ. _____	74
§2. Фракталы. _____	78
§3. Детерминированный хаос. _____	81
§4. Синергетика. _____	85
§5. Метод обратной задачи рассеяния _____	85
Уравнение Кортевега - де Фриза _____	85
Схема метода обратной задачи рассеяния _____	87
<i>Прямая задача рассеяния</i> _____	87
<i>Обратная задача рассеяния</i> _____	88
Применение метода обратной задачи рассеяния к решению задачи	
Коши с уравнением Кортевега - де Фриза. _____	89
<i>Литература.</i> _____	91

Глава 3. Методы решения задач.

1. Метод конечных разностей.

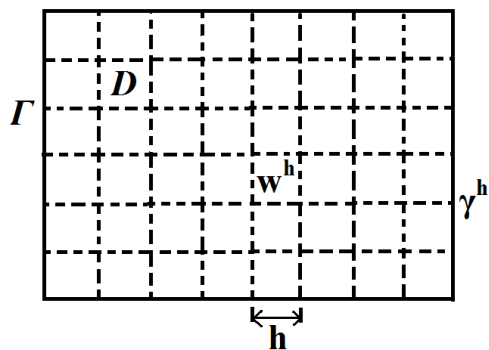
§1. Общие понятия.

Напомним некоторые понятия, которые рассматривались в курсе дифференциальных уравнений, и определим обозначения. Пусть требуется численным методом найти решение следующей задачи:

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \\ Ku(x) = \mu(x), & x \in \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

Здесь Γ - граница области D , L - дифференциальный оператор, K - оператор дополнительных (начальных или граничных) условий, $f(x)$ и $\mu(x)$ - заданные функции.

Введем в области D прямоугольную координатную сетку w . Будем для простоты рассматривать равномерную сетку, то есть такую, у которой шаг изменения координаты x_m ($m = 1, \dots, n$) постоянный, равный h_m . По разным



направлениям величина шага h может быть разной. Обозначим узлы сетки, как x^h . Совокупность точек x^h внутри области D обозначим как w^h , а совокупность точек x^h , лежащих на границе области D обозначим как γ^h . Обозначим $f^h = f(x^h)$ и $\mu^h = \mu(x^h)$.

Наряду с решением задачи (1) – дифференцируемой функцией $u(x)$ будем рассматривать так называемую сеточную функцию v^h , представляющую собой совокупность чисел – значений v_i в узлах сетки. Для v^h составим разностные алгебраические аналоги дифференциальных операторов, фигурирующих в (1). Например, производной $Lu = \frac{\partial u}{\partial x}$ в точке

x_i поставим в соответствие разностный оператор $L_h v = \frac{v_{i+1} - v_i}{h}$;

дифференциальному оператору $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ поставим в соответствие

$$L_h v = \frac{1}{h} \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h} \right) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} \text{ и т. д.}$$

Тогда, система уравнений для v^h , соответствующая (1), будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} L_h v^h = f^h, & x^h \in w^h \\ K_h v^h = \mu^h, & x^h \in \gamma^h \end{cases} \quad (2)$$

Систему алгебраических уравнений (2) называют разностной схемой для системы (1).

Близость сеточных функций (также, как обычных функций) можно оценивать в различных нормах. Мы, для простоты, будем рассматривать их в норме, соответствующей норме равномерного приближения, то есть будем считать $\|v^h\| = \max_i |v_i|$.

Будем говорить, что разностный оператор L_h аппроксимирует дифференциальный оператор L с точностью порядка k , если $\|Lu^h - L_h u^h\| \leq Ch^k$, где константа C не зависит от величины шага сетки h .

Если подставить решение u задачи (1) в разностные соотношения (2), то получим, что эти соотношения выполнены не точно:

$$\begin{cases} L_h u^h = f^h + \varepsilon^h, & x^h \in w^h \\ K_h u^h = \mu^h + \varepsilon^h, & x^h \in \gamma^h \end{cases} \quad (3)$$

ε^h называется невязкой. Будем говорить, что разностная схема (2) аппроксимирует задачу (1) с порядком k , если $\|\varepsilon^h\| \leq Ch^k$. Легко видеть,

что если L_h и K_h аппроксимируют операторы L и K с точностью порядка k , то и схема (2) аппроксимирует задачу (1) с тем же порядком точности.

Рассмотрим решение v^h задачи (2) и z^h - решение такой же задачи с мало измененной правой частью

$$\begin{aligned} L_h z^h &= f^h + \varepsilon^h, & x^h &\in w^h \\ K_h z^h &= \mu^h + \eta^h, & x^h &\in \gamma^h \end{aligned}$$

Разностная схема называется устойчивой, если найдутся такие числа M и N , что для любых ε^h и η^h будет выполнено $\|z^h - v^h\| \leq M \|\varepsilon^h\| + N \|\eta^h\|$.

Будем говорить, что решение (2) - функция v^h - сходится к решению (1) - функции u^h - с порядком k , если $\|u^h - v^h\| \leq Ch^k$.

В курсе дифференциальных уравнений было доказано, что из аппроксимации и устойчивости следует сходимость с порядком, равным порядку аппроксимации.

Разностная задача называется корректной, если она однозначно разрешима и решение непрерывно зависит от дополнительных данных равномерно по h (свойство устойчивости).

§2. Разностные задачи для уравнения теплопроводности.

Рассмотрим задачу теплопроводности на отрезке $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, t) = \mu_0(t) \\ u(1, t) = \mu_1(t) \end{cases} \quad (1)$$

Будем интересоваться изменением решения за период времени $0 \leq t \leq T$. В указанной области введем равномерную сетку с некоторым

шагом h по пространственной координате, и с шагом τ - по временной, так что

$$w^h = \{x_m = hm; m = 0, 1, \dots, N_x; hN_x = 1\}$$

$$w^\tau = \{t_n = \tau n; n = 0, 1, \dots, N_t; \tau N_t = T\}$$

$$w^{x\tau} = w^x \times w^\tau$$

Символом $v_{m,n}$ обозначим значение сеточной функции в узле с координатами (x_m, t_n) . Будем помечать все переменные, относящиеся к $(n+1)$ -ому временному слою, «галочкой» сверху, например \hat{v} или \hat{u} , а к n -ому без «галочки». Таким образом, разностный аналог производной $u_t(x_m, t_n)$ будет иметь вид:

$$v_t = \frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau}$$

(Значок v_t является символом, а не «настоящей» производной от v , поскольку у сеточной функции v – набора чисел – не существует производной.)

Разностный аналог второй производной будет:

$$\Delta v = \frac{1}{h} \left(\frac{v_{m+1} - v_m}{h} - \frac{v_m - v_{m-1}}{h} \right) = \frac{v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}}{h^2}$$

При составлении разностного аналога уравнения задачи (1) мы можем брать Δv на n -ом слое по времени, а можем на $(n+1)$ -ом. В первом случае получаем так называемую явную разностную схему

$$\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} = \frac{v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}}{h^2} + f_m^n \quad (2)$$

Если вторую производную вычислять по значениям v на $(n+1)$ -ом слое, то получим неявную разностную схему:

$$\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} = \frac{\hat{v}_{m+1} - 2\hat{v}_m + \hat{v}_{m-1}}{h^2} + f_m^n \quad (3)$$

Шаблон называется совокупность узлов сетки, значения v в которых присутствуют в разностном уравнении.

Шаблон явной разностной схемы изображен на рис.1, а шаблон неявной схемы показан на рис.2.

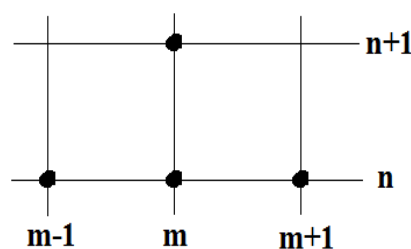


Рис.1

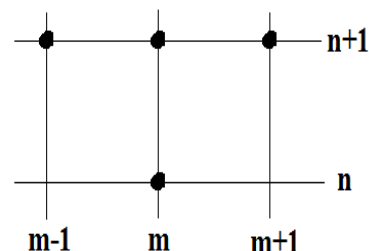


Рис.2

Можно также рассматривать схему с весами. Она выглядит следующим образом:

$$L_{ht}^\sigma = v_t - \left(\sigma \Lambda \hat{v} + (1 - \sigma) \Lambda v \right) = f_m^n \quad (4)$$

где σ - некоторое число от нуля до единицы. В случае, когда $\sigma = 0$, разностная схема является явной. Если положить $\sigma = 1$, то схема чисто неявная. В случае, когда $\sigma = 0.5$, разностный оператор имеет вид $L_{ht}^{0.5} = v_t - 0.5 \left(\Lambda \hat{v} + \Lambda v \right) = f_m^n$. При этом разностную схему называют симметричной.

В курсе дифференциальных уравнений было показано, что точность аппроксимации производной u_t разностным аналогом v_t имеет 1-ый порядок точности, а аппроксимации производной u_{xx} величиной Λv имеет 2-ой порядок точности. Отсюда точность аппроксимации для явной и чисто неявной схемы $\underline{O}(\tau + h^2)$. В случае симметричной разностной схемы точность аппроксимации равна $\underline{O}(\tau^2 + h^2)$.

Устойчивость решения задачи теплопроводности на бесконечной прямой.

Рассмотрим вопрос устойчивости явной и неявной разностной схемы для задачи теплопроводности на бесконечной прямой.

Необходимые условия. Спектральный метод.

Необходимые условия устойчивости могут быть найдены с помощью спектрального метода Неймана. Рассмотрим явную схему с начальными условиями в виде гармоники некоторой частоты:

$$\begin{cases} \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} = \frac{v_{m+1,n} - 2v_{m,n} + v_{m-1,n}}{h^2} \\ v_{m,0} = e^{i\omega m} \end{cases} \quad (5)$$

Будем искать решение этой задачи в виде $v_{m,n} = \lambda^n e^{i\omega m}$, где λ некоторое число, (зависящее от выбора ω) подлежащее определению. Необходимым условием устойчивости будет являться то, что $|\lambda| \leq 1$ для любых ω . Это условие требуется, чтобы решение со временем не нарастало по модулю.

Подставив функцию $v_{m,n} = \lambda^n e^{i\omega m}$ в виде в уравнение (5) и сократив на $\lambda^n e^{i\omega m}$, получим равенство:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} = \frac{e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega}}{h^2}. \text{ Отсюда, после простых преобразований, получим:}$$

$$\lambda = 1 - \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}. \text{ Необходимое условие } |\lambda| \leq 1 \text{ выполняется для любых } \omega$$

при $\frac{2\tau}{h^2} \leq 1$. Следовательно, для устойчивости явной разностной схемы

необходимо выполнение определенного условия на соотношение шагов:

$$\tau \leq \frac{h^2}{2}. \text{ Такая устойчивость называется условной.}$$

Теперь рассмотрим чисто неявную разностную схему для той же задачи:

$$\begin{cases} \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} = \frac{v_{m+1,n+1} - 2v_{m,n+1} + v_{m-1,n+1}}{h^2} \\ v_{m,0} = e^{i\omega m} \end{cases} \quad (6)$$

Подставив функцию $v_{m,n} = \lambda^n e^{i\omega m}$ в уравнение этой задачи, и сократив на $\lambda^{n+1} e^{i\omega m}$, получим равенство:

$$1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega}}{h^2}. \text{ Отсюда } \lambda = \frac{1}{1 + \frac{4\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega}{2}} \leq 1, \text{ т.к. знаменатель}$$

всегда не меньше 1. Таким образом, для явной схемы необходимое условие устойчивости выполнено при любом соотношении шагов. Такая схема называется абсолютно устойчивой.

Достаточные условия устойчивости.

Получим достаточные условия устойчивости явной разностной схемы. Пусть мы решаем задачу

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < T \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Для устойчивости явной схемы достаточно, чтобы решение задачи

$$\begin{cases} \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} = \frac{v_{m+1,n} - 2v_{m,n} + v_{m-1,n}}{h^2} + \varepsilon_{m,n} \\ v_{m,0} = \eta_m \end{cases} \quad (7)$$

удовлетворяло оценке $\|v^h\| = M \|\varepsilon^h\| + N \|\eta^h\|$. Перепишем уравнение (7) в виде:

$$v_{m,n+1} = \frac{\tau}{h^2} v_{m+1,n} + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) v_{m,n} + \frac{\tau}{h^2} v_{m-1,n} + \tau \varepsilon_{m,n}$$

При условии $\tau \leq \frac{h^2}{2}$ справедлива оценка:

$$\begin{aligned} |v_{m,n+1}| &\leq \left| \frac{\tau}{h^2} v_{m+1,n} + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) v_{m,n} + \frac{\tau}{h^2} v_{m-1,n} \right| + \tau |\varepsilon_{m,n}| \leq \\ &\leq \frac{\tau}{h^2} \|v_n\| + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) \|v_n\| + \frac{\tau}{h^2} \|v_n\| + \tau \|\varepsilon\| \leq \|v_n\| + \tau \|\varepsilon\| \end{aligned}$$

где $\|v_n\| = \max_m |v_{m,n}|$. Отсюда $\|v_{n+1}\| \leq \|v_n\| + \tau \|\varepsilon\|$. По индукции имеем:

$$\|v_n\| \leq \|\eta\| + \tau n \|\varepsilon\|.$$

Поскольку $\tau = T / N_t$, где N_t число разбиений отрезка $(0, T)$ сеткой, то $\tau n \|\varepsilon\| \leq T \|\varepsilon\|$. Следовательно $\|v\| \leq \|\eta\| + T \|\varepsilon\|$, что означает устойчивость схемы.

Итак, условие $\tau \leq \frac{h^2}{2}$ является как необходимым, так и достаточным условием устойчивости явной схемы.

Заметим, что в случае уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ условие устойчивости явной разностной схемы будет $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$.

Обратимся к случаю неявной разностной схемы. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} = \frac{v_{m+1,n+1} - 2v_{m,n+1} + v_{m-1,n+1}}{h^2} + \varepsilon_{m,n} \\ v_{m,0} = \eta_m \end{cases} \quad (8)$$

Перепишем уравнение этой задачи в виде:

$$v_{m,n+1} = v_{m,n} + \frac{\tau}{h^2} (v_{m+1,n+1} - 2v_{m,n+1} + v_{m-1,n+1}) + \tau \varepsilon_{m,n}$$

Пусть на $(n+1)$ -ом временном слое максимальное значение $v_{m,n+1}$ достигается при некотором $m = m_0$. Тогда $(v_{m_0+1,n+1} - 2v_{m_0,n+1} + v_{m_0-1,n+1}) \leq 0$.
Имеем:

$$v_{m,n+1} \leq v_{m_0,n+1} = v_{m_0,n} + \frac{\tau}{h^2} (v_{m_0+1,n+1} - 2v_{m_0,n+1} + v_{m_0-1,n+1}) + \tau \varepsilon_{m_0,n} \leq$$

$$v_{m_0,n} + \tau \varepsilon_{m_0,n} \leq \|v_n\| + \tau \|\varepsilon\|$$

Аналогично доказывается, что $v_{m,n+1} \geq -\|v_n\| - \tau \|\varepsilon\|$. Следовательно, $\|v_{n+1}\| = \max_m |v_{m,n+1}| \leq \|v_n\| + \tau \|\varepsilon\|$. Отсюда $\|v\| \leq \|\eta\| + T \|\varepsilon\|$, что означает безусловную устойчивость неявной схемы.

Итак, неявная схема имеет преимущество перед явной в плане устойчивости. Ограничение на шаги сетки $\tau \leq \frac{h^2}{2a^2}$ может быть весьма чувствительным при расчете больших задач, где число точек по x велико, соответственно h мало, и необходимость проводить расчет с очень мелким шагом τ требует больших затрат времени счета.

С другой стороны явная схема имеет преимущество с точки зрения простоты алгоритма вычислений. Если нам известны значения сеточной функции на n -ом слое по времени (например, при $n = 0$ из начальных условий), то решение на $(n+1)$ -ом находится непосредственно из уравнения (2). Для неявной схемы, зная значения v на n -ом слое мы должны решать систему алгебраических уравнений (3) размерности $(N_x - 1)$ для определения v на $(n+1)$ -ом слое. Такая задача требует порядка $O(N_x^3)$ операций, что может быть очень большим числом. Поэтому, для численного решения задачи (1) по неявной схеме был разработан метод прогонки, использующий специальный трехдиагональный вид матрицы системы алгебраических уравнений,

получаемый для определения сеточной функции на $(n+1)$ - ом слое. Число операций, используемых при применении метода прогонки, порядка $O(N_x)$.

§3. Метод прогонки для решения задачи теплопроводности на отрезке.

Вернемся к задаче (1) §2. Будем ее численно решать, используя схему с весами, частным случаем которой является неявная схема. Имеем:

$$\begin{cases} v_t - (\sigma \Lambda \hat{v} + (1-\sigma) \Lambda v) = f_{m,n} \\ v_{m,0} = \varphi_m \\ v_{0,n} = \mu_n^1 \\ v_{N_x,n} = \mu_n^2 \end{cases}$$

Перепишем уравнение этой разностной задачи в виде:

$$-\frac{\sigma\tau}{h^2} \hat{v}_{m-1} + \left(1 + 2\frac{\sigma\tau}{h^2}\right) \hat{v}_m - \frac{\sigma\tau}{h^2} \hat{v}_{m+1} = v_m + \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} [v_{m-1} - 2v_m + v_{m+1}] + \tau f_m$$

При этом индекс m пробегает значения от 1 до N_x-1 . Обозначим:

$$A_m = \frac{\sigma\tau}{h^2}, \quad B_m = \left(1 + 2\frac{\sigma\tau}{h^2}\right), \quad C_m = \frac{\sigma\tau}{h^2}, \quad F_m = v_m + \frac{(1-\sigma)\tau}{h^2} [v_{m-1} - 2v_m + v_{m+1}] + \tau f_m$$

Тогда определение \hat{v} сводится к решению задачи:

$$A_m \hat{v}_{m-1} - B_m \hat{v}_m + C_m \hat{v}_{m+1} = -F_m \quad (m=1, \dots, N_x-1)$$

$$\hat{v}_0 = \mu^1, \quad \hat{v}_{N_x} = \mu^2$$

Эта алгебраическая система является частным случаем задачи, решаемой методом прогонки, к изложению которого мы и переходим.

Метод прогонки применяется к решению системы алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_m y_{m-1} - B_m y_m + C_m y_{m+1} = F_m & (m=1, \dots, N-1) \\ y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1, & y_N = \alpha_2 y_{N-1} + \beta_2 \end{cases} \quad (1)$$

где либо $B_m > A_m + C_m$, $0 \leq \alpha_{1,2} \leq 1$, либо $B_m \geq A_m + C_m$, $0 \leq \alpha_{1,2} < 1$.

Для решения (1) положим, что значения искомой функции в двух любых соседних точках связаны линейным соотношением, а именно:

$$y_m = d_{m+1} \cdot y_{m+1} + \sigma_{m+1} \quad (2)$$

где d_m и σ_m называются прогоночными коэффициентами.

Сдвинув в (2) индекс на единицу, имеем:

$$y_{m-1} = d_m \cdot y_m + \sigma_m \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнение (1) исключаем y_{m-1} :
 $A_m (d_m y_m + \sigma_m) - B_m y_m + C_m y_{m+1} = F_m$.

Отсюда $(A_m d_m - B_m) y_m = -C_m y_{m+1} + F_m - A_m \sigma_m$.

Используя (2), исключаем y_m :

$$y_{m+1} [(A_m d_m - B_m) d_{m+1} - C_m] = F_m - A_m d_m - \sigma_{m+1} (A_m d_m - B_m).$$

Для того, чтобы это соотношение было верно для любых y_{m+1} нужно, чтобы выражение в квадратных скобках и правая часть было равны нулю. Приравнявая их нулю, получаем рекуррентные формулы для определения прогоночных коэффициентов:

$$\begin{aligned} d_{m+1} &= \frac{C_m}{B_m - A_m d_m} \\ \sigma_{m+1} &= \frac{F_m - A_m \sigma_m}{A_m d_m - B_m} \end{aligned} \quad (4)$$

Сравнивая граничное условие задачи (1) $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$ с (2), которое при $m=0$ имеет вид $y_0 = d_1 \cdot y_1 + \sigma_1$, находим: $d_1 = \alpha_1$, $\sigma_1 = \beta_1$.

Используя эти значения d_1 и σ_1 , совершаем прогонку в направлении возрастания индекса, последовательно определяя из (4) значения коэффициентов d_m и σ_m для $m=1, \dots, N$.

На правом конце имеем два соотношения, связывающие y_{N-1} и y_N . Это $y_{N-1} = d_N \cdot y_N + \sigma_N$ и $y_N = \alpha_2 y_{N-1} + \beta_2$. Из этих уравнений находим

$$y_N = \frac{\alpha_2 \sigma_N + \beta_2}{1 - \alpha_2 d_N} \quad (5)$$

При $d_1 = \alpha_1$ и условиях, наложенных при постановке задачи (1) на $A_m, B_m, C_m, \alpha_{1,2}$ из (4) получаем, что все $d_m < 1$ для $m=2, \dots, N$. Учитывая, что $\alpha_2 \leq 1$, получаем знаменатель в (5) положительным. Следовательно, значение y_N определено.

Используя найденное значением y_N , делаем обратную прогонку в сторону уменьшающихся значений индекса, последовательно определяя из (4) значения y_m . Число операций при поиске решения задачи (1) пропорционально числу узлов в слое.

§4. Консервативные разностные схемы.

При составлении разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами, кроме точности аппроксимации и устойчивости схемы, важно чтобы для численного решения выполнялись законы сохранения,

присущие дифференциальной задаче. Такие схемы называются консервативными. При нарушении консервативности можем получить ошибочное решение.

Пример неконсервативной схемы.

Рассмотрим простейший пример - задачу стационарного распределения тепла на отрезке, при условии, что коэффициент теплопроводности $k(x)$ - есть разрывная функция, а именно:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right) = 0 \\ u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где

$$k(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 3, & \text{при } 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Непрерывным решением задачи (1), (2) является кусочно-линейная функция

$$u(x) = \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}x, & \text{при } 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}(1-x), & \text{при } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение задачи (1) можно переписать в следующем виде:

$$k(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial k(x)}{\partial x} \frac{\partial u(x)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

Составим разностную схему для (4). Для этого выберем на отрезке $[0, 1]$ равномерную сетку, состоящую из четного количества точек N . Тогда точка $x = 1/2$ не совпадает с точками разбиения сетки x_m . Поэтому

значения коэффициента $k(x_m)$ и разностный аналог производной $\frac{\partial k}{\partial x}$ определены. Обозначим ближайшую точку разбиения слева от $x = 1/2$, как x_n . Очевидно $n = N/2$. Точка x_{n+1} будет точкой разбиения, ближайшей справа к $x = 1/2$.

Выберем разностную схему с аппроксимацией уравнения (4) порядка $\underline{O}(h^2)$:

$$k_m \frac{v_{m+1} - 2v_m + v_{m-1}}{h^2} + \frac{k_{m+1} - k_{m-1}}{2h} \frac{v_{m+1} - v_{m-1}}{2h} = 0$$

Перепишем последнее уравнение в виде:

$$\left(\frac{1}{4}k_{m-1} + k_m - \frac{1}{4}k_{m+1} \right) v_{m-1} + (-2k_m) v_m + \left(-\frac{1}{4}k_{m-1} + k_m + \frac{1}{4}k_{m+1} \right) v_{m+1} = 0 \quad (5)$$

Будем искать численное решение уравнения (5) в виде кусочно-линейной функции:

$$v(x_m) = \begin{cases} 1 - ax_m, & \text{при } 0 < x_m < \frac{1}{2} \\ b(1 - x_m), & \text{при } \frac{1}{2} < x_m < 1 \end{cases} \quad (6)$$

По физическому смыслу решение должно быть непрерывным, т.е. $\lim_{h \rightarrow 0} v_n = 1 - a/2 = \lim_{h \rightarrow 0} v_{n+1} = b(1 - 1/2)$. Отсюда

$$a + b = 2 \quad (7)$$

Рассмотрим уравнение (5) для $m=n$ и $m=n+1$. Используя равенства $v_{n-1} = v_n + ah$ и $v_{n+2} = v_{n+1} - bh$, следующие из (6), получаем:

$$\frac{1}{2}(v_n + ah) - 2v_n + \frac{3}{2}v_{n+1} = 0$$

$$\frac{5}{2}v_n - 6v_{n+1} + \frac{7}{2}(v_{n+1} - bh) = 0$$

Приводя подобные слагаемые, имеем:

$$3v_{n+1} - 3v_n + ah = 0$$

$$5v_{n+1} - 5v_n + 7bh = 0$$

Отсюда: $a = \frac{21}{5}b$

С учетом формулы (7) находим коэффициенты

$$a = \frac{21}{13} \quad \text{и} \quad b = \frac{5}{13} \quad (8)$$

Следовательно, $v|_{x=0.5} = \lim_{h \rightarrow 0} v_{n+1} = \frac{5}{13}(1 - 0.5) = \frac{5}{26} \neq \frac{1}{4} = u(0.5)$.

Таким образом, решение $u(x)$ дифференциальной задачи, выражаемое формулой (3), отличается от численного решения $v(x) = \lim_{h \rightarrow 0} v^h(x_m)$. Причиной

расхождения численного и аналитического решений является использование неконсервативной

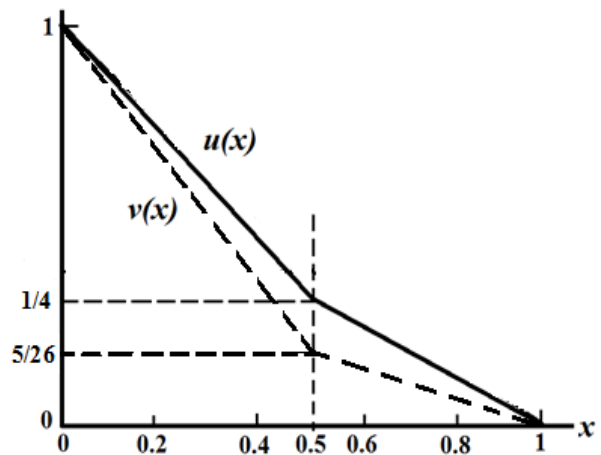
разностной схемы, т.е. схемы, которая не отражает законы сохранения. А именно, в дифференциальной задаче имеет место закон сохранения

теплового потока $W = -k(x) \frac{du}{dx} = const$. При составлении разностной

схемы мы не обратили на это внимание. Схема построена так, что в точке $x = 1/2$ имеет место разрыв разностного аналога потока тепла

$W_m = -k_m \frac{v_{m+1} - v_m}{h}$. Из (6) и (8) следует, что $W_m = a = 21/13$ при

$x < 1/2$ и $W_m = 3b = 15/13$ при $x > 1/2$.



Метод баланса при составлении разностных схем для уравнения теплопроводности.

Проиллюстрируем метод баланса (или интегро-интерполяционный метод) на примере решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t) \quad (9)$$

в случае, когда k и f являются быстроменяющимися или разрывными в некоторых точках функциями.

Как и раньше значения сеточной функции на s -ом временном слое в узлах сетки x_m будем обозначать, как v_m , а на $(s+1)$ -ом слое, как \hat{v}_m . Кроме того, введем промежуточные точки $x_{m+0.5} = h + x_{m-0.5} = h(m+0.5)$ и будем разностные аналоги потока тепла $W_{m+0.5}$ рассматривать в этих точках.

Напишем уравнение баланса тепла на отрезке $[x_{m-0.5}; x_{m+0.5}]$. Поток тепла W равен: $W = -k \frac{\partial u}{\partial x}$. Интегрируя равенство $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{W}{k}$ на отрезке $[x_{m-1}; x_m]$, имеем:

$$u_{m-1} - u_m = \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{W}{k} dx \quad (10)$$

Уравнение (9) можно представить в виде: $\frac{\partial W}{\partial x} = f(x, t) - \frac{\partial u}{\partial t}$. Интегрируя последнее выражение, получаем:

$$W_{m+0.5} - W_{m-0.5} = \int_{x_{m-0.5}}^{x_{m+0.5}} \left(f - \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx \quad (11)$$

Функции $\frac{\partial u}{\partial t}$ и W непрерывны и мало изменяются на малом интервале $[x_{m-1}; x_m]$. Поэтому, для получения приближенных значений интегралов, $\frac{\partial u}{\partial t}$ и W можем выносить из под интегралов (10) и (11) в средней точке участка интегрирования. Получаем аппроксимации:

$$\hat{v}_{m+1} - \hat{v}_m \approx -W_{m+0.5} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{dx}{k}, \quad W_{m+0.5} - W_{m-0.5} \approx -h \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=x_m} + \int_{x_{m-0.5}}^{x_{m+0.5}} f dx$$

Используя эти соотношения, полагаем

$$W_{m+0.5} = -a_{m+0.5} \cdot \frac{\hat{v}_{m+1} - \hat{v}_m}{h}, \quad \text{где} \quad a_{m+0.5} = \frac{h}{\int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{dx}{k}}$$

$$\frac{W_{m+0.5} - W_{m-0.5}}{h} = -\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} + F_m, \quad \text{где} \quad F_m = \frac{1}{h} \int_{x_{m-0.5}}^{x_{m+0.5}} f dx$$

Исключая из полученных соотношений W , приходим к разностному уравнению:

$$\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} = \frac{1}{h} \left(a_{m+0.5} \frac{\hat{v}_{m+1} - \hat{v}_m}{h} - a_{m-0.5} \frac{\hat{v}_m - \hat{v}_{m-1}}{h} \right) + F_m \quad (12)$$

Коэффициенты $a_{m+0.5}$ и F_m вычисляются по заданным в уравнении (1) функциям $k(u)$ и $f(x, t)$. В случае, когда k и f непрерывны, вычисление интегралов, определяющих $a_{m+0.5}$ и F_m можно заменить разностной аппроксимацией. Например,

$$\frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{k_{m-0.5}} \quad \text{или} \quad \frac{1}{h} \int_{x_m}^{x_{m+1}} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_{m+1}} + \frac{1}{k_m} \right)$$

Схема (12) является консервативной, поскольку при ее написании учитывались законы сохранения (10) и (11) для каждой элементарной ячейки разностной сетки. Схема (12) неявная, следовательно абсолютно устойчивая и имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

Консервативная разностная схема для решения задачи (1), (2).

Вернемся к рассмотренному выше примеру. В соответствие с (12), консервативная разностная схема для уравнения (1) при условии (2) будет иметь вид:

$$a_{m+0.5}(v_{m+1} - v_m) - a_{m-0.5}(v_m - v_{m-1}) = 0, \text{ где}$$

$$a_{m-0.5} = \begin{cases} k_1 = 1, & m \leq n = \frac{N}{2} \\ \frac{2k_1k_2}{k_1 + k_2} = \frac{3}{2}, & m = n + 1 \\ k_2 = 3, & m > n + 1 \end{cases}$$

По-прежнему ищем v_m решение в форме (6). Для $m=n$ и $m=n+1$ получаем:

$$m = n: \quad (u_{n-1} - u_n) = \frac{3}{2}(u_n - u_{n+1})$$

$$m = n + 1: \quad \frac{3}{2}(u_n - u_{n+1}) = 3(u_{n+1} - u_{n+2})$$

С учетом (6) получаем систему:

$$\begin{cases} ah = \frac{3}{2}(a + b)\frac{h}{2} \\ \frac{3}{2}(a + b)\frac{h}{2} = 3bh \end{cases}$$

Решая данную систему, находим, что $a = 3b$.

Отсюда, с учетом (7) находим: $a = 3/2$ и $b = 1/2$. Следовательно,

$v|_{x=0.5} = \lim_{h \rightarrow 0} v_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - 0.5) = \frac{1}{4} = u(0.5)$. Численное решение совпадает с точным решением дифференциальной задачи во всех узлах сетки.

§5. Экономичные разностные схемы.

Экономичной разностной схемой называется схема, которая, во-первых, является безусловно устойчивой; во-вторых, требует при расчетах число операций, пропорционального числу узлов сетки. Создание и использование таких схем важно в многомерных задачах, требующих большого объема вычислений.

В основе построения экономичных разностных схем лежит идея сведения многомерной задачи к цепочке одномерных. Одной из первых экономичных схем является построенная в 1955 году схема переменных направлений (продольно-поперечная схема).

Схема переменных направлений

Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u + f(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \\ u(x, y, t) = \mu(x, y, t), \{x, y\} \in \Gamma \\ 0 \leq x \leq l_x; 0 \leq y \leq l_y; 0 \leq t \leq T \end{cases} \quad (1)$$

Введем трехмерную сетку: по двум пространственным координатам и по времени.

$$\begin{aligned} x_m &= h_x m; \quad m = 0, 1, \dots, N_x; \quad h_x N_x = l_x \\ y_n &= h_y n; \quad n = 0, 1, \dots, N_y; \quad h_y N_y = l_y \\ t_s &= \tau s; \quad s = 0, 1, \dots, N_t; \quad \tau N_t = T \end{aligned}$$

Кроме того, введем промежуточные слои по времени: $t_{s+1/2} = \tau(s+1/2)$. Значения сеточной функции на s -ом временном слое обозначаем как $v_{m,n}$; на $(s+1)$ -ом слое как $\hat{v}_{m,n}$; на слое $(s+1/2)$ как $v_{m,n}^{0.5}$.

Заменяем дифференциальные операторы конечно-разностными аналогами.

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u \rightarrow \Lambda_x v + \Lambda_y v,$$

$$\text{где } \Lambda_x v = \frac{v_{m+1,n} - 2v_{m,n} + v_{m-1,n}}{h_x^2}, \quad \Lambda_y v = \frac{v_{m,n+1} - 2v_{m,n} + v_{m,n-1}}{h_y^2}$$

В схеме переменных направлений переход со слоя на слой осуществляется в 2 шага, используя промежуточный (дробный) слой.

$$\begin{cases} \frac{v^{0.5} - v}{\tau/2} = \Lambda_x v + \Lambda_y v^{0.5} + f \\ \frac{\hat{v} - v^{0.5}}{\tau/2} = \Lambda_x \hat{v} + \Lambda_y v^{0.5} + f \end{cases} \quad (2)$$

Первое уравнение в системе (2) является явным по направлению x , и неявным – по направлению y , а второе уравнение – наоборот. Поэтому, каждое уравнение в отдельности может быть решено методом прогонки. В этом случае счет по схеме переменных направлений требует числа арифметических операций, пропорционального числу узлов сетки, т.е. $O(N_x N_y N_t)$, и на каждый узел сетки приходится число операций, не зависящее от числа узлов. Схема имеет точность аппроксимации $O(\tau^2 + h_x^2 + h_y^2)$.

Используя спектральный метод, исследуем устойчивость схемы (2). Рассмотрим переход с s -го на $(s+1)$ -й временный слой для однородных уравнений ($f = 0$). Пусть $v_{m,n} = e^{i\alpha m + i\beta n}$. Ищем решение на слое $(s+1/2)$, как $v_{m,n}^{0.5} = \lambda_1 v_{m,n}$, а на $(s+1)$ -ом как $\hat{v}_{m,n} = \lambda_2 v_{m,n}^{0.5} = \lambda_2 \lambda_1 v_{m,n}$. Подставляя решение в таком виде в уравнения (2), сокращая первое из них на $v_{m,n}$, а второе на $v_{m,n}^{0.5}$, получаем:

$$\begin{cases} \frac{\lambda_1 - 1}{\tau/2} = \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h_x^2} + \lambda_1 \frac{e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}}{h_y^2} \\ \frac{\lambda_2 - 1}{\tau/2} = \lambda_2 \frac{e^{i\alpha} - 2 + e^{-i\alpha}}{h_x^2} + \frac{e^{i\beta} - 2 + e^{-i\beta}}{h_y^2} \end{cases}$$

Отсюда

$$\lambda_1 = \frac{1 - 2 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + 2 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}} \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \frac{1 - 2 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 + 2 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

Как легко проверить, каждое из чисел $|\lambda_1|$ и $|\lambda_2|$ по отдельности, при некоторых значениях частот α и β , и выборе некоторого соотношения шагов τ, h_x, h_y может быть больше 1. В то же время, представляя произведения $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ в виде

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{1 - 2 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + 2 \frac{\tau}{h_x^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1 - 2 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}{1 + 2 \frac{\tau}{h_y^2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}$$

получаем, что всегда выполнено $|\lambda_1 \lambda_2| \leq 1$. Схема безусловно устойчива.

Мы проверили, что при любом соотношении шагов выполнено необходимое условие устойчивости. На доказательстве того, что выполнено также и достаточное условие, мы останавливаться не будем.

Схема переменных направлений является экономичной разностной схемой. Однако, ее нельзя обобщить на трехмерный случай. В трехмерном случае схема, построенная по тому же принципу, что (2), будет неявной только по одному направлению и явной уже по двум. В результате она не будет устойчивой.

Локально-одномерная схема.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \tag{3}$$

в случае трех пространственных переменных. Дифференциальный оператор Δu и соответствующий ему разностный оператор Λv можно представить в виде суммы операторов, каждый из которых включает производные, или, соответственно, разности лишь по одной пространственной переменной:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \quad \Lambda v = \sum_{i=1}^3 \Lambda_i v \quad (i=1,2,3).$$

Идея локально-одномерной схемы вычисления заключается в том, что переход с s -го на $(s+1)$ -й временный слой производится в три этапа, на каждом из которых учитывается лишь один из операторов Λ_i . Пусть v - это значение сеточной функции на s -м временном слое, \hat{v} - на $(s+1)$ -ом. Вводим еще два массива промежуточных значений \bar{v} и $\bar{\bar{v}}$. Для уравнения (3) один из возможных вариантов схемы будет:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{v} - v}{\tau} &= \Lambda_1 \bar{v} + f \\ \frac{\bar{\bar{v}} - \bar{v}}{\tau} &= \Lambda_2 \bar{\bar{v}} \\ \frac{\hat{v} - \bar{\bar{v}}}{\tau} &= \Lambda_3 \hat{v} \end{aligned} \tag{4}$$

Получена система разностных уравнений, каждое из которых не аппроксимирует исходное дифференциальное, но может быть легко решено методом прогонки вдоль соответствующего направления. Суммируя уравнения (4), получаем:

$$\frac{\hat{v} - v}{\tau} = \Lambda_1 \bar{v} + \Lambda_2 \bar{\bar{v}} + \Lambda_3 \hat{v} + f$$

Можно показать, что это уравнение уже аппроксимирует (4) с точностью $O(\tau + h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)$. Говорят, что имеет место суммарная аппроксимация — результирующий оператор послойного перехода получился аппроксимирующим.

В схеме (4) уравнения для простоты составлены по чисто неявной схеме. Для повышения точности аппроксимации можно использовать схему с весами, выбрав $\sigma = 0.5$. Возможны также другие способы учета правой части f . Например, введение ее во все уравнения с весовыми множителями, которые подбираются из условий наилучшей суммарной аппроксимации (минимизации ошибки аппроксимации на следующем слое по времени).

Приведенная выше схема является абсолютно устойчивой. Применяя при вычислениях в (4) метод прогонки получаем, что число необходимых операций пропорционально числу узлов сетки. Тем самым локально-одномерная схема является экономичной.

§6. Итерационные методы при решении нелинейных уравнений.

При изучении высокотемпературных процессов необходимо учитывать зависимость коэффициентов теплоемкости и теплопроводности от температуры. В результате, для описания процесса распространения тепла мы получаем квазилинейное уравнение теплопроводности:

$$c(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f, \text{ где } c(u) \text{ и } k(u) > 0. \text{ Это уравнение}$$
 заменой $v = \int_0^u c(u) du$ сводится к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + f \quad (1)$$

Для квазилинейных уравнений использование явных схем нецелесообразно, если функция $k(u)$ является быстроменяющейся

(например, степенной). В этом случае условие устойчивости $\tau \leq \frac{h^2}{2 \max k(u)}$ требует очень мелкого шага по времени. (Кроме того, в неоднородной среде функции k и c могут зависеть от пространственных переменных и быть разрывными). Поэтому желательно применение неявных схем. В случае нелинейных уравнений для этого приходится использовать итерационные методы.

Рассмотрим неявную схему для решения квазилинейного уравнения теплопроводности (1):

$$\frac{\hat{v}_m - v_m}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[a_{m+1}(\hat{v}) (\hat{v}_{m+1} - \hat{v}_m) - a_m(\hat{v}) (\hat{v}_m - \hat{v}_{m-1}) \right] + f_m$$

Здесь v - это значение сеточной функции на s -м временном слое, \hat{v} - на $(s+1)$ -ом, а $a_i(v) = k\left(\frac{v_{i-1} + v_i}{2}\right)$.

Приведенная разностная схема является нелинейной, поэтому непосредственное использование метода прогонки невозможно. Для того, чтобы в этой ситуации применить прогонку используют итерационный метод. Он заключается в том, что переход с s -го на $(s+1)$ -ый временной слой совершается путем нескольких повторений расчета, при каждом из которых значения $a_m(y)$ фиксируются («замораживаются»), на основе результатов предыдущей итерации. С помощью такого приема при каждой итерации разностное уравнение становится линейным.

В качестве нулевого приближения $\hat{v}^{[0]}$ на $(s+1)$ -ом временном слое обычно берут v - значение сеточной функции на s -м слое. Первое приближение $\hat{v}^{[1]}$ определяют, решая линейное уравнение:

$$\frac{\hat{v}_m^{[1]} - v_m}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[a_{m+1}(v) \left(\hat{v}_{m+1}^{[1]} - \hat{v}_m^{[1]} \right) - a_m(v) \left(\hat{v}_m^{[1]} - \hat{v}_{m-1}^{[1]} \right) \right] + f_m$$

Последующие приближения $\hat{v}^{[k]}$ находят из уравнений:

$$\frac{\hat{v}_m^{[k]} - v_m}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left[a_{m+1} \left(\hat{v}^{[k-1]} \right) \left(\hat{v}_{m+1}^{[k]} - \hat{v}_m^{[k]} \right) - a_m \left(\hat{v}^{[k-1]} \right) \left(\hat{v}_m^{[k]} - \hat{v}_{m-1}^{[k]} \right) \right] + f_m$$

$k = 2, 3, \dots$

Решение получившегося уравнения для каждой итерации находят методом прогонки. Условием окончания итерационного процесса служит условие малости изменения нормы

$$\left\| \hat{v}^{[k+1]} - \hat{v}^{[k]} \right\| = \max_{0 < m < N} \left| \hat{v}_m^{[k+1]} - \hat{v}_m^{[k]} \right| < \varepsilon$$

Можно также задавать фиксированное число итераций. Обычно уже две-три итерации заметно повышают точность по сравнению с первым приближением. Итерационные методы для обеспечения заданной точности позволяют использовать более крупный шаг по времени по сравнению с безитерационными схемами, что зачастую приводит к значительному уменьшению объема вычислительной работы.

§7. Разностные схемы для решения уравнение переноса.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f \\ u|_{x=0} = \mu(t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases} \quad (1)$$

Как и раньше, введем равномерную сетку

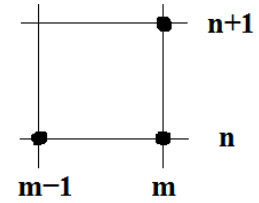
$$w^h = \{x_m = hm; m = 0, 1, \dots\}$$

$$w^\tau = \{t_n = \tau n; n = 0, 1, \dots\}$$

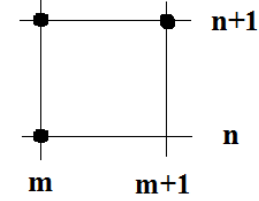
$$w^{x\tau} = w^x \times w^\tau$$

Для данной задачи можно написать несколько различных разностных схем, которые называются *схемами бегущего счета*. Рассмотрим следующие 4 аппроксимации верхнего уравнения системы (1) и соответствующие шаблоны:

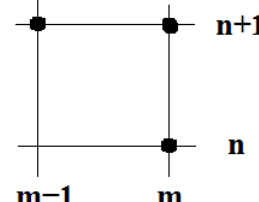
$$\frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} + c \frac{v_{m,n} - v_{m-1,n}}{h} = f_{m,n}, \quad (2)$$



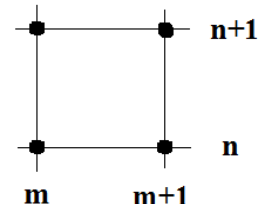
$$\frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} + c \frac{v_{m+1,n+1} - v_{m,n+1}}{h} = f_{m,n+1}, \quad (3)$$



$$\frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} + c \frac{v_{m,n+1} - v_{m-1,n+1}}{h} = f_{m,n+1}, \quad (4)$$



$$\begin{aligned} & \frac{v_{m+1,n+1} - v_{m+1,n}}{\tau} + c \frac{v_{m+1,n} - v_{m,n}}{h} + \\ & + \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} + c \frac{v_{m+1,n+1} - v_{m,n+1}}{h} = f_{m+1,n} + f_{m,n+1} \end{aligned} \quad (5)$$



Вычисления по схемам бегущего счета очень просты алгоритмически. Зная из условий задачи (1) значения разностной функции на нулевом по времени слое и в левой точке на первом слое, последовательно слева направо определяем значения на всем первом слое. Затем повторяем операцию на следующем временном слое и т.д.

Можно показать, что точность аппроксимации разностных схем (2)-(4) – первого порядка, (5) - второго порядка точности.

Схемы (2) и (3) являются условно устойчивыми, а схемы (4) и (5) абсолютно устойчивыми. Получим условия устойчивости для схемы (2), рассматривая для простоты задачу на бесконечном участке по x .

Вначале спектральным методом исследуем необходимые условия устойчивости схемы (2). Для этого рассмотрим разностную задачу с однородным уравнением:

$$\begin{cases} \frac{v_{m,n+1} - v_{m,n}}{\tau} + c \frac{v_{m,n} - v_{m-1,n}}{h} = 0 \\ v_{m,0} = e^{i\omega m} \end{cases}$$

Ищем ее решение в виде: $v_{m,n} = \lambda^n e^{i\omega m}$. Подставляем такой вид решения в разностное уравнение и сокращаем на $v_{m,n}$. Получаем:

$\frac{\lambda - 1}{\tau} + c \frac{1 - e^{-i\omega}}{h} = 0$. Иначе, $\lambda = 1 - \frac{c\tau}{h}(1 - \cos \omega + i \sin \omega)$. Вычисляя модуль λ , получаем:

$$|\lambda|^2 = 1 - 4 \frac{c\tau}{h} \sin^2 \frac{\omega}{2} \left(1 - \frac{c\tau}{h} \right) \quad (6)$$

Легко видеть, что при $\frac{c\tau}{h} > 1$ и $\sin^2 \frac{\omega}{2} > 0$ правая часть (6) больше 1, а при $0 < \frac{c\tau}{h} \leq 1$ меньше 1. Схема (2) будет устойчивой, если $|\lambda| \leq 1$ при любом ω . Значит, необходимым условием устойчивости является условие $\frac{c\tau}{h} \leq 1$.

Теперь проверим, что полученное необходимое условие на соотношение шагов τ и h является также и достаточным для устойчивости

схемы. Итак, пусть $\frac{c\tau}{h} \leq 1$. По-другому записав разностное уравнение, имеем задачу:

$$\begin{cases} v_{m,n+1} = \left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) v_{m,n} + \frac{c\tau}{h} v_{m-1,n} + \tau f_{m,n} \\ v_{m,0} = \varphi_m \end{cases}$$

Мажорантно оценим левую часть уравнения, учитывая, что $\left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) \geq 0$. Получаем:

$$\begin{aligned} |v_{m,n+1}| &\leq \left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) |v_{m,n}| + \frac{c\tau}{h} |v_{m-1,n}| + \tau |f_{m,n}| \leq \left(1 - \frac{c\tau}{h}\right) \|v_n\| + \frac{c\tau}{h} \|v_n\| + \tau \|f\| = \\ &= \|v_n\| + \tau \|f\| \end{aligned}$$

где, как и ранее, $\|f\| = \max_{m,n} \|f_{m,n}\|$, а $\|v_n\| = \max_m \|v_{m,n}\|$. Отсюда $\|v_{n+1}\| \leq \|v_n\| + \tau \|f\|$. Следовательно, $\|v_n\| \leq \|v_0\| + n\tau \|f\| \leq \|\varphi\| + T\|f\|$, где T - величина интервала времени, на котором мы ищем решение. Эта оценка, по определению, означает устойчивость решения задачи по начальным данным и правой части. Схема (2) является условно устойчивой.

Аналогичные рассуждения для схемы (3) приводят к условию устойчивости $\frac{c\tau}{h} \geq 1$.

Условия сходимости схем (2) и (3) называют условиями Куранта.

Для схемы (4): $\frac{\lambda - 1}{\tau} + \lambda c \frac{1 - e^{-i\omega}}{h} = 0$. При этом

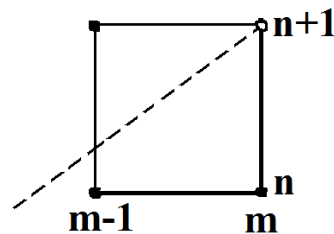
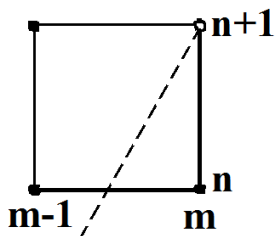
$$|\lambda| = \frac{1}{1 + 4 \frac{c\tau}{h} \left(1 + \frac{c\tau}{h}\right) \sin^2 \frac{\omega}{2}} \leq 1, \text{ поэтому схема (4) безусловно устойчива.}$$

Геометрический критерий устойчивости схемы бегущего счета

Имеется простой геометрический критерий, позволяющий установить условия устойчивости той или иной схемы бегущего счета по виду шаблона. А именно, на каждом шаге вычисления по любой из рассматриваемых схем, в одной из точек шаблона разностная функция ищется, а в остальных уже известна. Проведем характеристику уравнения (1) из точки, где решение ищется. (Характеристикой является прямая $x - ct = const$). Если шаги τ и h выбраны так, что эта характеристика пересекает отрезок соединяющий точки шаблона, в которых решение известно, то схема будет устойчивой. Если же характеристика проходит мимо такого отрезка, то неустойчивой.

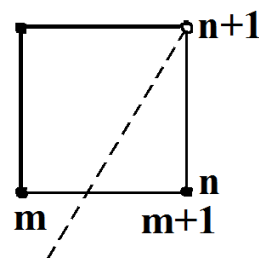
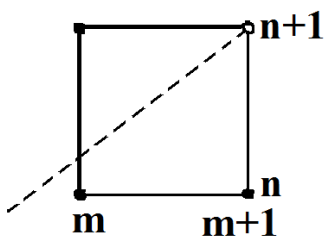
На левом рис. А показан случай, когда схема (2) устойчива. На правом рис. А – когда неустойчива. Светлым маркером помечена точка шаблона, в которой решение ищется, темными – где известно, пунктиром – характеристика.

Рис. А



На рис. Б то же самое для схемы (3).

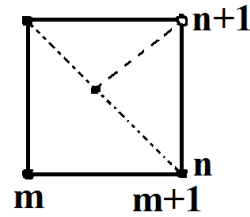
Рис.Б



Для схем (4) и (5) характеристика всегда пересекает отрезок, соединяющий точки, в которых решение известно. На рисунках В и Г этот отрезок изображен точками.

Рис. В

Рис. Г



Как говорилось выше, четырехточечная схема (5) имеет более высокий порядок аппроксимации, чем трехточечные, и безусловно устойчивая. Однако она имеет недостаток, по сравнению с трехточечными, - она не является монотонной.

Разностная схема называется монотонной, если она обладает следующим свойством:

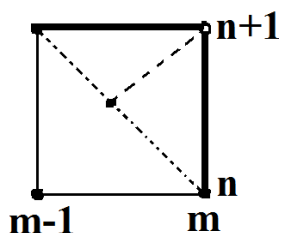
из того, что разностная функция $v_{m,n}$ на n -ом временном слое монотонно меняется с изменением номера m , следует, что она будет также монотонно меняться и на $(n+1)$ -ом слое.

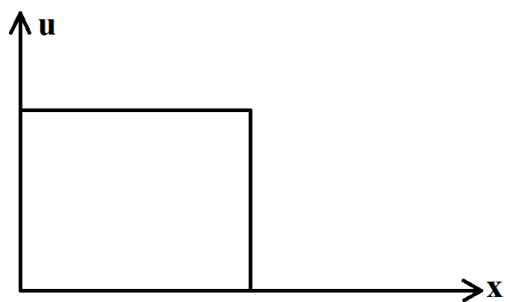
Можно показать, что линейная монотонная разностная схема для уравнения переноса не может иметь второй или более высокий порядок точности.

В качестве иллюстрации сказанного, рассмотрим задачу:

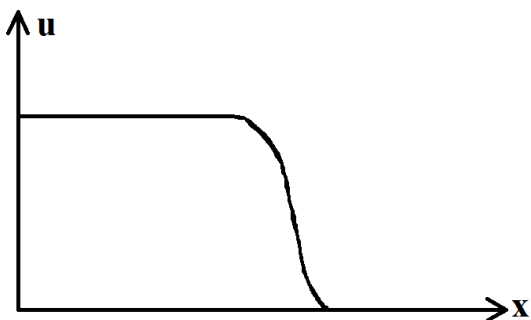
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & (x > 0, t > 0) \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{t=0} = 1 \end{cases} \quad (7)$$

Ниже на первом рисунке показано точное решение этой задачи на некоторый момент времени, на втором - получаемое с помощью монотонной схемы (4), на третьем - с помощью немонотонной схемы (5).

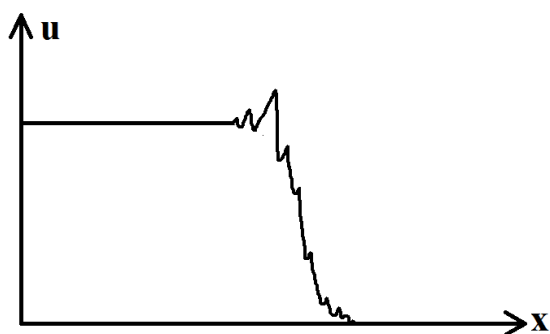




Точное решение задачи (7)



Решение задачи (7), полученное по схеме (4)



Решение задачи (7), полученное по схеме (5)

При быстропеременных решениях обычно используют схемы первого порядка точности.

II. Вариационные и проекционные методы решения краевых задач.

§1. Сведение дифференциальной задачи к вариационной. Метод Ритца

Часто решения дифференциальной задачи может быть сведено к вариационной. Рассмотрим в области D задачу

$$\begin{cases} Lu = f \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Пусть L :

а) Линейный самосопряженный оператор, т.е. $(Lu, v) = (u, Lv)$ для любых $u|_{\Sigma} = v|_{\Sigma} = 0$.

б) Отрицательно определенный оператор, т.е. для любого u выполнено: $-(Lu, u) \geq \gamma \|u\|^2$, где $\gamma = \text{const} > 0$

В качестве *примера* такого оператора может служить дифференциальный оператор:

$$Au = \text{div}(k \text{ gradu}) - qu \quad (2)$$

где $k > 0$ и $q > 0$. Действительно, легко проверить, что в этом случае

$$-(Au, u) = \int_D [k \nabla^2 u + qu^2] dV \geq \min_D q \cdot \|u\|^2$$

Рассмотрим следующий функционал:

$$J[u] = 2(f, u) - (Lu, u) \quad (3)$$

Для этого функционала рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$\begin{cases} J[u] \rightarrow \min \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Имеем

$$\begin{aligned} J[u + \delta u] - J[u] &= 2(f, \delta u) - (Lu, \delta u) - (L\delta u, u) - (L\delta u, \delta u) = \\ &= 2(f - Lu, \delta u) - (L\delta u, \delta u) \end{aligned} \quad (5)$$

Вариация функционала, то есть линейная часть приращения, равна нулю при $Lu - f = 0$. Следовательно, экстремаль функционала в задаче (4) является решением задачи (1). На этой экстремали достигается сильный минимум, поскольку $-(L\delta u, \delta u) \geq \gamma \|\delta u\|^2$.

Наоборот, пусть u решение задачи (1). Тогда соотношение (5) показывает, что

$$J[u + \delta u] - J[u] = -(L\delta u, \delta u) \geq 0 \quad \text{для любой функции } (u + \delta u).$$

Следовательно, решение задачи (1) является решением и задачи (4).

Обратимся к изложению метода Ритца. Пусть функционал $J[u]$, заданный выражением (3), определен на множестве $u \in U$. Выберем некоторую систему линейно-независимых функций $\{\varphi_n\}$, таких, что $\varphi_n \in U$. Фиксируем произвольное натуральное число N . Обозначим, как u_N функции вида

$$u_N = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \quad (6)$$

Их совокупность образует множество U_N . Значение функционала $J[u_N]$ зависит от выбора коэффициентов c_k . Таким образом $J[u_N] = \Phi(c_1, \dots, c_N)$.

Обозначим точное решение задачи (4) как \bar{u} , а минимальное значение функционала $\min_{u \in U} J[u] = J[\bar{u}] = \mu$. Минимум $J[u_N]$ на множестве U_N обозначим как μ_N , а функцию, на которой этот минимум достигается, как \bar{u}_N . ($\mu_N = J[\bar{u}_N] = \min_{U_N} J[u_N]$). Поскольку,

$U_N \in U_{N+1} \in U$, то $\mu \leq \mu_{N+1} \leq \mu_N$. Нужно выяснить вопрос: сходится ли $\bar{u}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \bar{u}$?

Лемма. Пусть система функций $\{\varphi_k\}$ такова, что для $\forall \varepsilon > 0$ существуют $N(\varepsilon)$ и u_N такие, что $J[u_N] - J[\bar{u}] < \varepsilon$. Тогда $\mu_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mu$ и $\|\bar{u}_N - \bar{u}\| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$.

Доказательство. В соответствие с условиями леммы можно выбрать ε , по нему $N(\varepsilon)$ и u_N так, что $\varepsilon > J[u_N] - J[\bar{u}] \geq J[\bar{u}_N] - J[\bar{u}] = \mu_N - \mu$. Следовательно, при $N > N(\varepsilon)$ справедливо $0 \leq \mu_N - \mu < \varepsilon$.

Далее, согласно (5) имеем: $\mu_N - \mu = J[\bar{u}_N] - J[\bar{u}] = -(L\delta_N, \delta_N) \geq \gamma \|\delta_N\|^2$, где $\delta_N = \bar{u}_N - \bar{u}$.

Следовательно, $\|\delta_N\|^2 < \frac{\mu_N - \mu}{\gamma} < \frac{\varepsilon}{\gamma}$.

Выбрав последовательность положительных $\varepsilon_n \rightarrow 0$ и соответствующую последовательность возрастающих N , получаем, что $\|\bar{u}_N - \bar{u}\| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$. Утверждение доказано.

В условиях леммы фигурирует функция \bar{u} , которая заранее нам неизвестна. Рассмотрим, при каких достаточных условиях будут выполнены условия леммы. Используя (5) и неравенство Коши – Буняковского, имеем:

$J[u_N] - J[\bar{u}] = -(L\delta, \delta) \leq \|L\delta\| \cdot \|\delta\|$, где $\delta = u_N - \bar{u}$. Получаем, что для выполнения условий леммы достаточно, чтобы $\|L\delta\| \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$. Поэтому достаточные условия можно выбрать в следующей форме:

система функций $\{\varphi_k\}$ такова, что для любой функции $u \in U$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют $N(\varepsilon)$ и u_N такие, что $\|L(u - u_N)\| < \varepsilon$, $\|u - u_N\| < 1$.

В случае примера (2) достаточно, чтобы $\{\varphi_k\}$ была такова, что любое $u \in U$ может быть приближено соответствующим u_N одновременно с производной: $\|u - u_N\| < \varepsilon$ и $\|\nabla u - \nabla u_N\| < \varepsilon$. Тогда

$$J[u_N] - J[\bar{u}] = -(A\delta, \delta) = \int_D [k(\nabla \delta)^2 + q\delta^2] dV \leq \left(\max_D k + \max_D q \right) (\|\delta\|^2 + \|\nabla \delta\|^2) < C\varepsilon$$

Алгоритм поиска \bar{u}_N .

Согласно (3) и (6):

$$J[u_N] = 2(f, u_N) - (Lu_N, u_N) = 2\left(f, \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k\right) - \left(L\left(\sum_{k=1}^N c_k \varphi_k\right), \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k\right) = \Phi(c_1, \dots, c_N) \quad (7)$$

Для поиска минимума функции Φ решаем систему уравнений: $\frac{\partial \Phi}{\partial c_k} = 0$ ($k = 1, \dots, N$). Дифференцируя (7) по c_k , имеем:

$$2(f, \varphi_k) - (Lu_N, \varphi_k) - (L\varphi_k, u_N) = 2(f - Lu_N, \varphi_k) = 0$$

Для определения коэффициентов c_k получаем систему уравнений:

$$(Lu_N - f, \varphi_k) = 0 \quad (k = 1, \dots, N) \quad (8)$$

Заметим, что интеграл $J[u]$ в выражении (8) не фигурирует. Можно непосредственно искать приближенное решение задачи (1) в форме (6). В этом случае для определения коэффициентов c_k также получим уравнения (8). Это будет являться методом Ритца в дифференциальной форме. Мы

вводили интеграл $J[u]$ и рассматривали интегральные соотношения для доказательства сходимости u_N к точному решению.

Исследуем уравнения (8). Эти уравнения, используя самосопряженность оператора L , можно представить в виде

$$\left(\sum_{k=1}^N c_k \varphi_k, L\varphi_m \right) = (f, \varphi_m). \text{ Отсюда получаем систему уравнений}$$

$$\sum_{k=1}^N \alpha_{k,m} c_k = \beta_m \quad (m=1, \dots, N) \quad (9)$$

$$\text{где } \alpha_{k,m} = (\varphi_k, L\varphi_m), \beta_m = (\varphi_m, f) \quad (10)$$

Докажем единственность решения системы (9). Для этого, как известно, нужно доказать, что однородная система

$$\sum_{k=1}^N \alpha_{k,m} \tilde{c}_k = 0 \quad (11)$$

имеет только тривиальное решение. Умножим (11) на \tilde{c}_m и просуммируем по m . Имеем:

$$0 = \sum_{m=1}^N \tilde{c}_m \sum_{k=1}^N \alpha_{k,m} \tilde{c}_k = \sum_{k=1}^N \tilde{c}_k \sum_{m=1}^N \tilde{c}_m (\varphi_m, L\varphi_k) = \sum_{k=1}^N \tilde{c}_k (u_N, L\varphi_k) = \\ \sum_{k=1}^N \tilde{c}_k (\varphi_k, Lu_N) = (u_N, Lu_N)$$

Используем знакоопределенность оператора L . Имеем:
 $0 = -(u_N, Lu_N) \geq \gamma \|u_N\|^2$. Следовательно $u_N = 0$, что доказывает единственность решения (9).

Итак, задача поиска \bar{u}_N сводится к решению линейной алгебраической системы уравнений (9), имеющей единственное решение.

Для примера (2) коэффициенты $\alpha_{n,m} = -\int_D [k \nabla \varphi_n \nabla \varphi_m + q \varphi_n \varphi_m] dV$, а

$$\beta_n = \int_D \varphi_n f dV$$

Рассмотренный метод Ритца относится к так называемым проекционным методам. Соотношению (8) можно придать следующий геометрический смысл. В качестве приближенного решения задачи (1) ищется функция u_N такая, что проекция вектора $(Lu_N - f)$ на «плоскость», образованную векторами $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, равна нулю.

§2. Проекционные методы

Кратко, на уровне знакомства с терминологией, укажем некоторые проекционные методы решения задачи (1) §1.

Метод Галеркина.

Так называется метод нахождения приближенного решения задачи (1)§1 в случае, когда оператор L не является самосопряженным и знакоопределенным. Алгоритм аналогичен методу Ритца. Приближенное решение ищется в виде разложения по базисным функциям $u_N = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$, где коэффициенты определяются из системы $(Lu_N - f, \varphi_k) = 0$, $(k = 1, \dots, N)$.

Метод наименьших квадратов.

Если в задаче (1)§1 малые изменения функции f приводят к малым изменениям решения u , то есть обратный оператор L^{-1} ограничен, то решение задачи можно искать из условия минимизации функционала невязки:

$$\|L[u] - f\|^2$$

Ищем приближенное решение задачи в виде $u_N = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$. Условие минимума

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_m} \|L[u_N] - f\|^2 &= \frac{\partial}{\partial c_m} \left(\left(L \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k, L \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k \right) - 2 \left(L \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k, f \right) + (f, f) \right) = \\ &= 2 \left(L \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k - f, L \varphi_m \right) = 0 \end{aligned}$$

Приводит к следующей системой уравнений для определения коэффициентов c_k :

$$(Lu_N, L\varphi_k) = (f, L\varphi_k) \quad (k = 1, \dots, N)$$

Метод моментов

Метод Галеркина для интегральных уравнений называют методом моментов. Пусть дано интегральное уравнение

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x)$$

Его приближенное решение ищут в виде разложения по некоторой базисной системе функций $\{\varphi_k\}$, т.е.

$$y_N(x) = \lambda \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k + f(x)$$

Подставляя указанный вид решения в уравнение, получаем:

$$\lambda \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \left(\lambda \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k(s) + f(s) \right) ds$$

Скалярно умножая последнее уравнение на φ_m , приходим к линейной системе алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^N \alpha_{k,m} c_k = \beta_m$$

где $\alpha_{n,m} = \int_a^b [\varphi_n(x) \varphi_m(x)] dx - \lambda \int_a^b \int_a^b K(x,s) \varphi_n(s) \varphi_m(x) dx ds$, а

$$\beta_m = \int_a^b K(x,s) \varphi_m(x) f(s) ds.$$

Если система $\{\varphi_k\}$ - ортонормированная, то данный метод эквивалентен

замене ядра $K(x,s)$ на вырожденное: $K(x,s) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \Omega_k(s)$, где

$$\Omega_k(s) = \int_a^b K(x,s) \varphi_k(x) dx. \text{ При этом значения } c_m \text{ определяются из}$$

системы уравнений: $c_m - \sum_{k=1}^N \alpha_{k,m} c_k = \beta_m$,

где $\alpha_{k,m} = \int_a^b \Omega_k(x) \varphi_m(x) dx$, а $\beta_m = \int_a^b \Omega_m(s) f(s) ds$.

Обобщенный метод моментов

Метод Галеркина имеет разновидности и обобщения. В качестве такого можно упомянуть обобщенный метод моментов.

Если существует оператор B , такой что оператор L представим в виде $L = L_1 + L_2$, где $(L_1 u, Bu) \geq \gamma_1 \|u\|^2$, $(L_2 u, Bu) \geq \gamma_2 \|Bu\|^2$, то решение ищут в виде (6), где коэффициенты c_k определяются из системы уравнений $(Lu_N - f, B\varphi_k) = 0$ ($k = 1, \dots, N$)

§3. Разностные схемы для уравнений с разрывными коэффициентами, основанные на вариационных принципах. Метод конечных элементов.

В последние годы происходит поиск новых методов построения разностных уравнений на основе вариационных принципов. Одной из центральных при этом является идея использования в качестве базисных функций - функций с конечным носителем, т.е. таких, которые только в

сравнительно небольшой (порядка шага сетки) окрестности отличны от нуля, а вне этой окрестности равны нулю. Решение задачи ищется в виде линейной комбинации функций с конечным носителем (конечным элементов) при неизвестных коэффициентах, которые выбираются на основе минимума того или иного функционала, связанного с вариационным принципом. Такие алгоритмы называются вариационно-разностными, проекционно-сеточными или методом конечных элементов.

Рассмотрим способ построения консервативной разностной схемы, использующий метод конечных элементов, для краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x)u = f(x) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1)$$

где $p(x) \geq p_0 > 0$ и $q(x) \geq 0$.

Согласно результатам §1 эта задача эквивалентна задаче:

$$\begin{cases} J[u] \rightarrow \min \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

где $J[u] = \int_0^1 \left[p \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + qu^2 + 2fu \right] dx$

Будем решать последнюю задачу, используя метод конечных разностей. Вводим равномерную сетку $w^h = \left\{ x_i = hi, i = 0, 1, \dots, N = \frac{1}{h} \right\}$. Аппроксимируем функцию $u(x)$ непрерывной ломаной линией $u^h(x)$, линейной на каждом отрезке $x_k \leq x \leq x_{k+1}$:

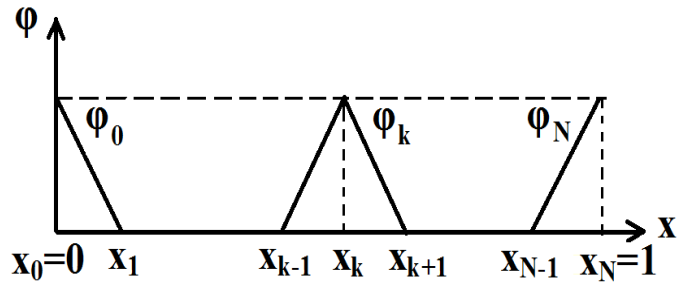
$$u^h(x) = \frac{x_{k+1} - x}{h} v_k + \frac{x - x_k}{h} v_{k+1} \quad (3)$$

где v_k - некоторые, подлежащие определению значения. Введем следующие обозначения: $w_{1k}(x) = \frac{x - x_k}{h}$, $w_{2k}(x) = \frac{x_{k+1} - x}{h}$. Тогда формула (3) перепишется в виде: $u^h(x) = w_{2k}(x)v_k + w_{1k}(x)v_{k+1}$. При этом сеточная функция $u^h(x)$ на всем отрезке $0 \leq x \leq 1$ представима в виде суммы:

$$u^h(x) = \sum_{k=0}^N v_k \varphi_k^h(x) \quad (4)$$

где функции $\varphi_i^h(x)$ определяются следующим образом:

$$\varphi_k^h(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{k-1}}{h}, & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \frac{x_{k+1} - x}{h}, & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$



$$\varphi_0^h(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h}, & x \in [0, x_1] \\ 0, & x \notin [0, x_1] \end{cases}$$

$$\varphi_N^h(x) = \begin{cases} \frac{1 - x}{h}, & x \in [x_{N-1}, 1] \\ 0, & x \notin [x_{N-1}, 1] \end{cases}$$

Теперь подставим полученную аппроксимацию (4) функции $u(x)$ в функционал $J[u]$:

$$J[u^h] = \int_0^1 \left[p \left(\frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 + q (u^h)^2 + 2 f u^h \right] dx$$

Учитывая, что $\frac{\partial w_{1k}(x)}{\partial x} = \frac{1}{h}$ и $\frac{\partial w_{2k}(x)}{\partial x} = -\frac{1}{h}$, меняя суммирование и интегрирование местами, получим:

$$J[u^h] = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \int_{x_k}^{x_{k+1}} p \frac{v_{k+1}^2 - 2v_{k+1}v_k + v_k^2}{h^2} dx + \right. \\ \left. + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[q(w_{1k}^2 v_{k+1}^2 + 2w_{1k} w_{2k} v_{k+1} v_k + w_{2k}^2 v_k^2) + 2f(w_{1k} v_{k+1} + w_{2k} v_k) \right] dx \right\}$$

Условием минимума этого функционала является следующая система равенств:

$$\frac{\partial J[u^h]}{\partial v_k} = 0 \quad \text{для } k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Учитывая вид функций w_{1k} и w_{2k} , приходим к системе уравнений для определения v_k :

$$\begin{cases} A_k v_{k-1} + B_k v_k + C_k v_{k+1} = -F_k \\ v_0 = v_N = 0 \end{cases} \quad (5)$$

где $A_k = p_{k-\frac{1}{2}} - q_{k-\frac{1}{2}}^{(1,2)}$, $B_k = p_{k+\frac{1}{2}} - q_{k+\frac{1}{2}}^{(1,2)}$, $C_k = p_{k-\frac{1}{2}} + p_{k+\frac{1}{2}} + q_{k-\frac{1}{2}}^{(1,2)} + q_{k+\frac{1}{2}}^{(1,2)}$,

$$F_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f w_{1k} dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f w_{2k} dx$$

При этом $p_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} p(x) dx$, а $q_{k+\frac{1}{2}}^{(i,j)} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} w_{i,k} w_{j,k} q dx$, где $\{i, j = 1, 2\}$.

Задача (5) может быть решена методом прогонки. Определив v_k , из (4) получаем приближенное решение $u^h(x)$ задачи (1).

Решение искалось в виде непрерывной кусочно-линейной функции, обеспечивающей аппроксимацию точного решения. Вариационный метод построения разностного уравнения можно использовать для получения приближенного решения любого порядка точности. С этой целью необходимо вместо простейших интерполяционных формул выбрать более точные. Переход от дифференциальной задачи к вариационной обеспечивает выполнение законов сохранения, что важно с точки зрения консервативности получаемой разностной схемы.

§4. Вариационный подход к решению задачи Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

в области G . Считаем, что $u(M) \in C^{(2)}(G) \cap C^{(1)}(\bar{G})$. Обозначим $\int_G fg \, dv = (f, g)$.

Умножая уравнение задачи (1) на u , интегрируя по области G и применяя формулу Грина получаем: $\lambda \cdot (u, u) = -(\Delta u, u) = (\nabla u, \nabla u)$.

Следовательно, для функционала $I[u] = \frac{(\nabla u, \nabla u)}{(u, u)}$ будет выполнено:

если u - собственная функция задачи (1), а λ - соответственное собственное значение, то $I[u] = \lambda$.

Рассмотрим теперь вариационную задачу:

$$\begin{cases} I[u] \rightarrow \min \\ u|_{\Sigma} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Покажем, что если $u \neq 0$ является решением задачи (2), то u - собственная функция задачи (1), а $\mu = I[u]$ является наименьшим собственным значением задачи (1).

Рассмотрим приращение функционала

$$I[u + \delta u] - I[u] = \frac{(\nabla(u + \delta u), \nabla(u + \delta u))}{(u + \delta u, u + \delta u)} - \frac{(\nabla u, \nabla u)}{(u, u)}$$

Линейная часть этого приращения, то есть вариация функционала, равна

$$\delta I = 2 \frac{(\nabla \delta u, \nabla u)(u, u) - (\nabla u, \nabla u)(u, \delta u)}{(u, u)^2}$$

Используя равенство $\frac{(\nabla u, \nabla u)}{(u, u)} = I[u] = \mu$, получаем

$$\delta I = 2 \frac{(\nabla \delta u, \nabla u) - \mu(u, \delta u)}{(u, u)} = \frac{-2}{(u, u)} (\Delta u + \mu u, \delta u)$$

Следовательно, экстремаль функционала $I[u]$ определяется уравнением $\Delta u + \mu u = 0$. Кроме того, согласно (2), $u|_{\Sigma} = 0$. Поскольку минимум функционала достигается на экстремали, то решение задачи (2) является решением задачи Штурма-Лиувилля. Таким образом, эквивалентность задач (1) и (2) доказана.

Согласно сказанному выше, любое решение задачи (1) удовлетворяет равенству $\lambda = I[u]$. Поэтому, $\mu = \min I[u] \leq \lambda$. Следовательно, μ является наименьшим собственным значением задачи (1).

III. Асимптотические методы.

§1. Метод малого параметра.

Малый параметр в задачах может возникать по разным причинам. Это может быть малый коэффициент или малое отношение каких то величин. Как известно, многие физические задачи описываются

нелинейными уравнениями, аналитические решения которых могут быть найдено лишь в редких случаях. Однако часто в физике встречаются задачи с так называемой слабой нелинейностью. В таких задачах нелинейные члены малы по сравнению с линейной частью. Это отношение малости можно рассматривать как малый параметр. Простейшим примером является задача о свободных колебаниях математического маятника. Из курса механики известно, что точное уравнение, описывающее колебания, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k \sin u = 0 \quad (1)$$

Поскольку это уравнение аналитически не решается, то обычно рассматривают лишь случай предельно малых колебаний, при которых полагают, что $\sin u \approx u$. Тогда получаем: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ku = 0$. Решение этого вырожденного уравнения хорошо известно. Если же нас интересует более точное решение уравнения (1), то помимо первого члена надо удерживать также следующий член разложения Тейлора $\sin u \approx u - \frac{u^3}{3!}$. Получаем:

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ku = k \frac{u^3}{6}$. Представим u в виде: $u = u_0 \varphi(t)$, где u_0 имеет смысл амплитуды колебаний. Тогда уравнение приобретает вид: $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + k\varphi = k \frac{u_0^2}{6} \varphi^3$. Величину $k \frac{u_0^2}{6}$, характеризующую малость нелинейного слагаемого, можно взять за малый параметр μ и искать поправки к гармоническому решению.

Регулярный случай.

Этот случай рассматривался в курсе дифференциальных уравнений. Кратко напомним некоторые полученные результаты.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu) \\ y|_{t=0} = y^0 \end{cases} \quad (2)$$

на интервале значений $0 \leq t \leq T$. Пусть известно решение \bar{y} вырожденной задачи:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}, t, 0) \\ \bar{y}|_{t=0} = y^0 \end{cases} \quad (3)$$

Будем искать решение задачи (2) в виде ряда по степеням μ :

$$y(t) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \dots \quad (4)$$

Подставим такой вид решения в правую часть уравнения (2), а затем функцию $f(y, t, \mu)$ также разложим по степеням μ :

$$\begin{aligned} f(y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots, t, \mu) = & f(y_0, t, 0) + \mu \left[y_1 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_0, \mu=0} + \left(\frac{\partial f}{\partial \mu} \right) \Big|_{y=y_0, \mu=0} \right] + \\ & + \mu^2 \left[y_2 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \Big|_{y=y_0, \mu=0} + \frac{y_1^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) \Big|_{y=y_0, \mu=0} + y_1 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \mu} \right) \Big|_{y=y_0, \mu=0} \right] + \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Многоточие означает члены более высокого порядка малости по μ . Подставляем (4) и (5) в уравнение задачи (2). Приравниваем члены стоящие при одинаковой степени μ .

При μ в нулевой степени получаем:

$$\begin{cases} \frac{dy_0}{dt} = f(y_0, t, 0) \\ y_0|_{t=0} = y^0 \end{cases}$$

С точностью до обозначений получили задачу (3), решение которой по предположению известно.

Для нахождения функций $y_i(t)$, где $i = 1, 2, \dots$ получаем последовательность задач, каждая из которых представляет собой задачу Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка. Для определения $y_i(t)$ имеем:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial f(y_0, t, 0)}{\partial y} y_i + Q_i(y_0, \dots, y_{i-1}, t, \mu) \\ y_i|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Неоднородность $Q_i(y_0, \dots, y_{i-1}, t, \mu)$ содержит функции $y_i(t)$, найденные ранее из соответствующих задач для y_1, \dots, y_{i-1} .

В курсе дифференциальных уравнений было доказано, что

$$\left| y(t) - \sum_{i=0}^n \mu^i y_i(t) \right| = O(\mu^{n+1})$$

Таким образом, можно найти решение задачи (2) с необходимой степенью точности.

Случай сингулярного возмущения.

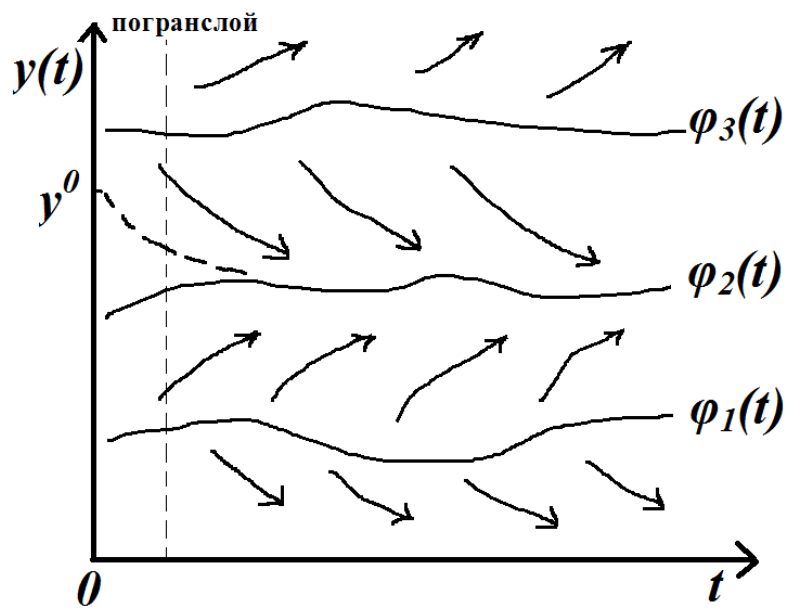
К этому случаю относятся задачи, в которых малый параметр стоит множителем при старшей производной. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \mu \frac{dy}{dt} = f(y, t) \\ y|_{t=0} = y^0 \end{cases} \quad (6)$$

Особенностью такой задачи является то, что соответствующее вырожденное уравнение $f(y(t), t) = 0$ является алгебраическим уравнением. Его решение в общем случае не удовлетворяет начальным условиям.

Кроме того, уравнение $f(\varphi(t), t) = 0$ может иметь несколько корней - решений $\varphi_i(t)$. Возникает вопрос, к какому из них стремится $y(t)$ - решение задачи (6) - при $\mu \rightarrow 0$?

На приведенном рисунке изображен случай, когда корней $\varphi_i(t)$ - три. В области между каждыми двумя из них функция f сохраняет знак, а, следовательно, сохраняет знак $\frac{dy}{dt}$. Стрелками показан ход интегральных кривых с ростом t . Рассмотрим область вокруг корня $\varphi_2(t)$. Выше $\varphi_2(t)$ интегральные кривые опускаются – функция f отрицательна, а ниже кривые поднимаются – положительна. При переходе через корень $\varphi_2(t)$ функция f меняет знак с положительного на отрицательный. Интегральные кривые сходятся к тому



корню, для которого $\frac{\partial f}{\partial \varphi}(\varphi_n(t), t) < 0$. Такое решение $\varphi_n(t)$ вырожденного уравнения $f(\varphi(t), t) = 0$ является устойчивым.

Область влияния некоторого корня – эта область в пространстве $\{t, y\}$, в которой интегральные кривые направлены к этому корню.

Имеет место теорема, утверждающая, что если $\varphi_i(t)$ является устойчивым корнем вырожденного уравнения и начальное значение y^0 в задаче (7) находится в области влияния этого корня, то для любого $t > 0$ решение $y(t) \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} \varphi_i(t)$.

В этой теореме речь идет о сходимости $y(t)$ к $\varphi_i(t)$ при фиксированном $t > 0$. Очевидно, равномерной сходимости нет, поскольку для любого $\mu > 0$ можно выбрать $t > 0$ настолько малым, что разность $y(t) - \varphi_i(t) \approx y^0 - \varphi_i(0)$. Существует пограничный слой (область значений t вблизи нуля), где разность $y(t) - \varphi_i(t)$ быстро убывает, но является существенной.

Построение равномерной асимптотики.

Для построения равномерной по t асимптотики в задаче (6) строят ряд, содержащий регулярную и погранслойную части.

$$y(t) = [y_0(t) + \mu y_1(t) + \dots] + [\Pi_0(\tau) + \mu \Pi_1(\tau) + \dots] \quad (7)$$

где $\tau = \frac{t}{\mu}$.

Правая часть уравнения (6) также представляют в виде регулярной и погранслойной частей:

$$f = F(t) + \Psi(\tau) \quad (8)$$

где

$$F(t) = f(y_0(t) + \mu y_1(t) + \dots, t)$$

$$\Psi(\tau) = f\left(\left[y_0(\mu\tau) + \mu y_1(\mu\tau) + \dots\right] + \left[\Pi_0(\tau) + \mu\Pi_1(\tau) + \dots\right], \mu\tau\right) - f\left(\left[y_0(\mu\tau) + \mu y_1(\mu\tau) + \dots\right], \mu\tau\right)$$

Функции $F(t)$ и $\Psi(\tau)$ раскладывают в ряд Тейлора по степеням параметра μ :

$$F = F_0 + \mu F_1 + \frac{\mu^2}{2} F_2 + \dots \quad \Psi = \Psi_0 + \mu \Psi_1 + \frac{\mu^2}{2} \Psi_2 + \dots \quad (9)$$

Подставляем (7) и (8) в виде (9) в уравнение (6). Приравниваем слагаемые при одинаковых степенях μ отдельно для регулярной части разложения и для погранслошной части. Учитываем, что $\mu \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}$.

Получаем:

$$\frac{dy_{i-1}}{dt} = F_i \quad \frac{d\Pi_i}{d\tau} = \Psi_i$$

Пусть граничное условие в задаче (6) зависит от μ :

$$y^0 = y^0(\mu) = y_0^0 + \mu y_1^0 + \frac{\mu^2}{2} y_2^0 + \dots$$

Тогда, приравняв слагаемые при μ^0 , имеем:

$$\begin{cases} f(y_0(t), t) = 0 \\ \frac{d\Pi_0}{d\tau} = f(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) - f(y_0(0), 0) = f(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) \\ \Pi_0(0) = y_0^0 - y_0(0) \end{cases} \quad (10)$$

При μ^1 получаем:

$$\begin{cases} \frac{dy_0(t)}{dt} = f'_y(y_0(t), t) y_1(t) \\ \frac{d\Pi_1}{d\tau} = f'_y(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) \Pi_1(\tau) + Q_1(\tau) \\ \Pi_1(0) = y_1^0 - y_1(0) \end{cases} \quad (11)$$

где $Q_1(\tau)$ - известная неоднородность:

$$Q_1(\tau) = [f'_y(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) - f'_y(y_0(0), 0)](y_1(0) + \tau y'_0(0)) + [f'_t(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) - f'_t(y_0(0), 0)]\tau$$

Обратим внимание, что первое из уравнений (11) это алгебраическое уравнение, из которого находится y_1 при уже известной функции y_0 .

Для произвольной степени μ^i имеем:

$$\begin{cases} y_i(t) - \text{определяется из алгебраического уравнения} \\ \frac{d\Pi_i}{d\tau} = f'_y(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) \Pi_i(\tau) + Q_i(\tau) \\ \Pi_i(0) = y_i^0 - y_i(0) \end{cases}$$

Можно доказать, что

$$\left| y(t, \mu) - \sum_{i=0}^n \mu^i \left(y_i(t) + \Pi_i\left(\frac{t}{\mu}\right) \right) \right| = \underline{O}(\mu^{n+1})$$

Пример.

$$\begin{cases} \mu \frac{dy}{dt} = y - y^2 & (0 \leq t \leq 1) \\ y|_{t=0} = \frac{1}{2} + \mu \end{cases} \quad (12)$$

Решениями вырожденными уравнения $y - y^2 = 0$ являются функции $y(t) = 0$ и $y(t) = 1$. Устойчивым из них будет только второе решение, т.к. в этом случае $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - 2y < 0$. Система для определения $\Pi_0(\tau)$ будет, согласно (10), выглядеть так:

$$\begin{cases} \frac{d\Pi_0}{d\tau} = (1 + \Pi_0) - (1 + \Pi_0)^2 \\ \Pi_0|_{\tau=0} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение является уравнением Бернулли. Решением системы будет функция $\Pi_0(\tau) = -\frac{1}{1 + e^\tau}$. Получаем асимптотическое приближение решения задачи (12) в виде:

$$y(t) = \frac{1}{1 + e^{-t/\mu}} + \underline{O}(\mu)$$

Для получения следующего члена разложения выпишем систему для определения $\Pi_1(\tau)$ в соответствие с (11).

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ \frac{d\Pi_1}{d\tau} = \left(1 - 2\left(1 - \frac{1}{1 + e^\tau}\right)\right)\Pi_1 \\ \Pi_1|_{\tau=0} = 1 \end{cases}$$

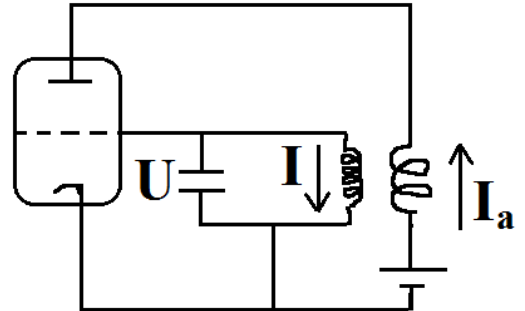
Ее решением будет функция $\Pi_1(\tau) = \frac{4e^\tau}{(1 + e^\tau)^2}$.

Получаем приближенное решение задачи (12) с точностью $\underline{O}(\mu^2)$. Оно имеет вид:

$$y(t) = \frac{1}{1 + e^{-t/\mu}} + \mu \frac{4e^{t/\mu}}{(1 + e^{t/\mu})^2} + \underline{O}(\mu^2)$$

§2. Метод осреднения

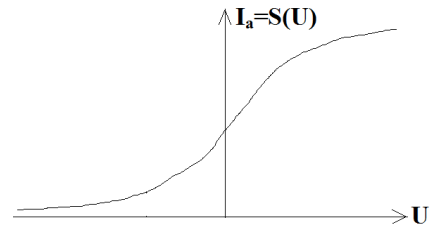
Рассмотрим ламповый генератор колебаний. Справедливы известные соотношения между зарядом Q и разностью потенциалов U на конденсаторе, током I через него и током I_a в анодной цепи лампы:



$$Q = CU, \quad I = \dot{Q}, \quad I_a = S(U),$$

$$L\dot{I} = -U + MI_a$$

Здесь точкой обозначена производная по времени, которое, в свою очередь, обозначается как τ ; M — определяет слабую индуктивную связь катушки в анодной цепи и в цепи управляющей сетки, $I_a = S(U)$ вольт-амперная характеристика лампы. Будем считать, что в некоторой, интересующей нас области значений U , она эта характеристика описывается соотношением $S'(U) = S_0 - S_1 U^2$. Ее вид показан на рисунке.



Исключая из приведенных выше уравнений Q , I_a и I , получаем

$$\ddot{U}CL - MS'(U)\dot{U} + U = 0. \quad \text{Вводя обозначения} \quad \sqrt{\frac{S_1}{S_0}}U = y, \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{LC}} \quad \text{и}$$

$\frac{MS_0}{\sqrt{LC}} = \varepsilon$ и считая ε достаточно малым, вследствие малости индуктивной связи получаем уравнения Ван-дер-Поля, описывающее колебания в генераторе:

$$\begin{cases} y'' - \varepsilon(1 - y^2)y' + y = 0 \\ y|_{t=0} = y^0 \\ y'|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь штрих означает производную по t . Задача рассматривается на большом промежутке времени $0 \leq t \leq T \sim \underline{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Попытаемся решать эту задачу путем разложения в ряд по методу, изложенному в предыдущем параграфе. Согласно общей схеме, ищем решение в виде:

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \dots \quad (2)$$

Решением вырожденной задачи (при $\varepsilon = 0$) являются гармонические колебания:

$$y_0(t) = y^0 \cos t \quad (3)$$

Подставляя (2) и (3) в уравнение (1) и приравнивая члены с множителем ε , получаем уравнение для определения $y_1(t)$:

$$\begin{aligned} y_1'' + y_1 &= (1 - y_0^2)y_0' = y^0 \sin t \left(1 - (y^0)^2 \cos^2 t\right) = \\ &= \left(1 - \frac{(y^0)^2}{4}\right) \sin t - \frac{(y^0)^2}{4} \sin 3t \end{aligned} \quad (4)$$

Так как частота первого слагаемого вынуждающей силы совпадает с характеристическим числом уравнения, то имеет место резонансный случай. Как известно при этом $y_1(t)$ содержит слагаемое, неограниченно возрастающее по времени. Решением (4) является функция:

$$y_1(t) = \left(1 + \frac{23}{16}(y^0)^2\right) \sin t + \frac{9}{16}(y^0)^2 \sin 3t - \left(1 - \frac{(y^0)^2}{4}\right) t \cos t$$

Видно, что второе слагаемое в (2) за время $t \sim \underline{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ становится не малым по сравнению с первым и метод разложения решения в ряд (2) по степеням ε (иначе говоря, регулярный метод малого параметра) неприменим. Этот случай является типичным для уравнений, описывающих колебания со слабой нелинейностью на большом интервале времени.

Возникающие затруднения, преодолеваются различными методами, одним из которых является метод осреднения. В физике его часто называют методом медленно меняющихся амплитуд. Существенный вклад в его развитие внесли Н.М.Крылов и Н.Н.Боголюбов.

Формализм метода.

Рассмотрим систему в так называемой стандартной форме:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \varepsilon \vec{X}(\vec{x}, t, \varepsilon) \quad (5)$$

где \vec{x} - искомый вектор, а \vec{X} - заданная вектор-функция. Относительно \vec{X} предполагается, что она достаточно гладкая и допускает осреднение по t , то есть существует функция $\langle \vec{X}(\vec{x}, \varepsilon) \rangle$, определяемая следующим

образом: $\langle \vec{X}(\vec{x}, \varepsilon) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \vec{X}(\vec{x}, t, \varepsilon) dt$. Интеграл берется по явно

входящей переменной t при фиксированном параметре \vec{x} . Если \vec{X} 2π -периодическая функция переменной t , то осредненная функция $\langle \vec{X}(\vec{x}, \varepsilon) \rangle$ определяется из соотношения:

$$\langle \vec{X}(\vec{x}, \varepsilon) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{X}(\vec{x}, t, \varepsilon) dt \quad (6)$$

Задача заключается в том, чтобы получить равномерное асимптотическое приближение решению $\vec{x}(t)$ системы (5) на больших интервалах времени $T \sim \varepsilon^{-1}$.

Разложим правую часть (5) по степеням параметра ε :

$$\vec{X}(\vec{x}, t, \varepsilon) = \vec{X}_1(\vec{x}, t) + \varepsilon \vec{X}_2(\vec{x}, t) + \dots \quad (7)$$

Функции $\vec{X}_i(t)$ будем в дальнейшем считать 2π -периодическими по переменной t и соответственно пользоваться средними вида (6).

Рассмотрим замену:

$$\vec{x} = \vec{\xi} + \varepsilon \vec{u}_1(\vec{\xi}, t) + \varepsilon^2 \vec{u}_2(\vec{\xi}, t) + \dots \quad (8)$$

Здесь $\vec{\xi}(t)$ медленно меняющаяся функция переменной t , удовлетворяющая системе вида:

$$\frac{d\vec{\xi}}{dt} = \varepsilon \vec{A}_1(\vec{\xi}) + \varepsilon^2 \vec{A}_2(\vec{\xi}) + \dots \quad (9)$$

Систему (9) называют усредненной системой для системы (1). Система (9) проще исходной системы (5) благодаря тому, что является автономной, т.е. ее правая часть не зависит от t .

Функции $\vec{u}_i(\vec{\xi}, t)$, $\vec{A}_i(\vec{\xi})$ подлежат определению. Чтобы представление (8) могло служить источником равномерных асимптотических приближений переменной \vec{x} , функции $\vec{u}_i(\vec{\xi}, t)$ должны быть ограниченными.

Для определения функций $\vec{u}_i(\vec{\xi}, t)$ и $\vec{A}_i(\vec{\xi})$ подставляем (8) в систему (5). Учитывая (7) и (9), получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon \vec{A}_1(\vec{\xi}) + \varepsilon^2 \vec{A}_2(\vec{\xi}) + \varepsilon^3 \dots + \varepsilon \frac{\partial \vec{u}_1(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial \vec{u}_1(\vec{\xi}, t)}{\partial \xi} \vec{A}_1(\vec{\xi}) + \varepsilon^3 \dots + \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \vec{u}_2(\vec{\xi}, t)}{\partial t} + \varepsilon^3 \dots = \varepsilon \vec{X}_1(\vec{\xi}, t) + \varepsilon^2 \vec{X}_2(\vec{\xi}, t) + \varepsilon^2 \frac{\partial \vec{X}_1(\vec{\xi}, t)}{\partial \xi} \vec{u}_1(\vec{\xi}, t) + \varepsilon^3 \dots \end{aligned}$$

Приравнявая члены при ε и ε^2 , имеем:

$$\vec{A}_1(\vec{\xi}) + \frac{\partial \vec{u}_1(\vec{\xi}, t)}{\partial t} = \vec{X}_1(\vec{\xi}, t) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_2(\vec{\xi}) + \frac{\partial \vec{u}_2(\vec{\xi}, t)}{\partial t} = \\ = \vec{X}_2(\vec{\xi}, t) + \frac{\partial \vec{X}_1(\vec{\xi}, t)}{\partial \xi} \vec{u}_1(\vec{\xi}, t) - \frac{\partial \vec{u}_1(\vec{\xi}, t)}{\partial \xi} \vec{A}_1(\vec{\xi}) = \Phi_2(\vec{\xi}, t) \end{aligned} \quad (11)$$

Для определения из одного соотношения (10) двух функций $\vec{u}_1(\vec{\xi}, t)$ и $\vec{A}_1(\vec{\xi})$, представим правую часть (10) в виде:

$\langle \vec{X}_1(\vec{\xi}) \rangle + (\vec{X}_1(\vec{\xi}, t) - \langle \vec{X}_1(\vec{\xi}) \rangle)$, где среднее значение

$$\langle \vec{X}_1(\vec{x}, \varepsilon) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{X}_1(\vec{x}, t) dt \text{ не зависит явно от } t.$$

После этого приравниваем друг другу функции, не зависящие от t и зависящие от t :

$$\vec{A}_1(\vec{\xi}) = \langle \vec{X}_1(\vec{\xi}, t) \rangle$$

$$\frac{\partial \vec{u}_1(\vec{\xi}, t)}{\partial t} = \vec{X}_1(\vec{\xi}, t) - \langle \vec{X}_1(\vec{\xi}) \rangle$$

Отсюда

$$\vec{u}_1(\vec{\xi}, t) = \int_0^t \left(\vec{X}_1(\vec{\xi}, t) - \langle \vec{X}_1(\vec{\xi}) \rangle \right) dt \quad (12)$$

(при интегрировании переменная $\vec{\xi}$ рассматривается как параметр). Интегрирование по t 2π -периодической функции с нулевым средним дает ограниченную функцию $u_1(\vec{\xi}, t)$.

После определения $\vec{u}_i(\vec{\xi}, t)$ и $\vec{A}_i(\vec{\xi})$ равенство (11) приобретает ту же структуру, что и (10) с известной правой частью $\Phi_2(\vec{\xi}, t)$. Приравнявая опять члены, не зависящие от t и зависящие от t функции, получаем:

$$\begin{aligned} \vec{A}_2(\vec{\xi}) &= \langle \vec{\Phi}_2(\vec{\xi}, t) \rangle \\ \frac{\partial \vec{u}_2(\vec{\xi}, t)}{\partial t} &= \vec{\Phi}_2(\vec{\xi}, t) - \langle \vec{\Phi}_2(\vec{\xi}) \rangle \end{aligned}$$

Отсюда находится ограниченная функция $\vec{u}_2(\vec{\xi}, t)$ и т.д.

Первое приближение:

Отбрасывая в (8) члены порядка ε и следующие и обозначая через $\vec{\xi}_1$ решение системы

$$\frac{d\vec{\xi}_1}{dt} = \varepsilon \vec{A}_1(\vec{\xi}) \quad (13)$$

получаем: $\frac{d\vec{\xi}}{dt} - \frac{d\vec{\xi}_1}{dt} \sim \varepsilon^2$. Можно ожидать, что на большом интервале

$T \sim \frac{1}{\varepsilon}$ будет справедлива оценка $\vec{\xi} - \vec{\xi}_1 \sim \varepsilon$. Так как при подстановке $\vec{\xi}_1$ вместо $\vec{\xi}$ в (8) погрешность порядка ε возникает уже в первом слагаемом, то удерживать член $\varepsilon \vec{u}_1$ и следующие не имеет смысла. Функцию $\tilde{x}_1 = \vec{\xi}_1$,

для которой $\vec{x} - \vec{x}_1 = \vec{x} - \vec{\xi}_1 \sim \varepsilon$, естественно называть первым приближением для \vec{x} , систему (13) – усредненной системой первого приближения, а соответствующую теорему, в которой приводится обоснование этой оценки, теоремой о первом приближении для систем в стандартной форме.

Улучшенное первое приближение:

Этот несколько жаргонный термин относится к конструкции вида:

$$\tilde{\vec{x}}_1 = \vec{\xi}_1 + \varepsilon \vec{u}_1(\vec{\xi}_1, t), \quad (14)$$

где $\vec{u}_1(\vec{\xi}_1, t)$ определяется формулой (12), то есть находится после решения усредненной системы первого приближения (13).

Понятно, что если $\vec{x} - \vec{\xi}_1 \sim \varepsilon$, то и $\vec{x} - \tilde{\vec{x}}_1 \sim \varepsilon$, т.е. $\tilde{\vec{x}}_1$ не дает большую точность для \vec{x} . Но с физической точки зрения бывает полезно не пренебрегать быстрой поправкой $\varepsilon \vec{u}_1$ к медленной составляющей приближенного решения.

Второе приближение:

Отбрасывая в (8) члены порядка ε^2 и следующие и обозначая через $\vec{\xi}_2$ решение системы:

$$\frac{d\vec{\xi}_2}{dt} = \varepsilon \vec{A}_1(\vec{\xi}_2) + \varepsilon^2 \vec{A}_2(\vec{\xi}_2) \quad (15)$$

получаем $\frac{d\vec{\xi}}{dt} - \frac{d\vec{\xi}_2}{dt} \sim \varepsilon^3$. Тогда можно ожидать, что на большом интервале $T \sim \frac{1}{\varepsilon}$ будет справедлива оценка $\vec{\xi} - \vec{\xi}_2 \sim \varepsilon^2$. Теперь при подстановке $\vec{\xi}_2$ вместо $\vec{\xi}$ в (8) в первом слагаемом возникает погрешность порядка ε^2 . Значит, удерживать член $\varepsilon^2 \vec{u}_2$ и следующие не имеет смысла.

Функцию $\vec{x}_2 = \vec{\xi}_2 + \varepsilon \vec{u}_1(\vec{\xi}_2, t)$, для которой $\vec{x} - \vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{\xi}_2 - \varepsilon \vec{u}_1(\vec{\xi}_2, t) \sim \varepsilon^2$, естественно называть вторым приближением для \vec{x} , а систему (15) – усредненной системой второго приближения.

Улучшенное второе приближение:

Улучшенным вторым приближением называется конструкция вида:

$$\vec{x}_2 = \vec{\xi}_2 + \varepsilon \vec{u}_1(\vec{\xi}_2, t) + \varepsilon^2 \vec{u}_2(\vec{\xi}_2, t)$$

Она, опять же, не повышает порядок погрешности $\vec{x} - \vec{x}_2 \sim \varepsilon^2$, но учитывает функцию \vec{u}_2 , которую можно найти после решения осредненной системы второго приближения (15).

Построение дальнейших приближений просматривается уже вполне отчетливо.

Пример

В задаче (1) метод осреднения может быть использован следующим образом. Сначала перепишем задачу (1) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y'(t) = z(t) \\ z' = \varepsilon(1 - y^2)z - y \\ y|_{t=0} = y^0 \\ z|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

При $\varepsilon = 0$: $y(t) = a \cos(t + \theta)$, $z(t) = -a \sin(t + \theta)$, $a = \text{const}$, $\theta = \text{const}$.

При $\varepsilon \neq 0$ будем искать решение в виде:

$$\begin{cases} y(t) = a(t) \cos(t + \theta(t)) \\ z(t) = -a(t) \sin(t + \theta(t)) \end{cases} \quad (17)$$

Подставляя (17) в систему (16), после несложных преобразований получаем следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} a' = \varepsilon \left[\frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a}{2} \cos 2(t + \theta) + \frac{a^3}{8} \cos 4(t + \theta) \right] \\ \theta' = \varepsilon \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) \sin 2(t + \theta) - \frac{a^3}{8} \sin 4(t + \theta) \right] \\ a|_{t=0} = y^0, \quad \theta|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Обозначая

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} a \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} y^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{X} &= \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a}{2} \cos 2(t + \theta) + \frac{a^3}{8} \cos 4(t + \theta) \\ \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) \sin 2(t + \theta) - \frac{a^3}{8} \sin 4(t + \theta) \right] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

получаем задачу

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \varepsilon \vec{X}(\vec{x}, t), \quad \vec{x}|_{t=0} = \vec{x}_0 \quad (19)$$

Система, входящая в эту задачу, является системой в стандартной форме, удобной для применения метода осреднения.

В рассматриваемом примере все \vec{X}_i для $i \geq 2$ равны нулю. Поэтому $X(\xi, t) = X_1(\xi, t)$.

Средними по t значениями правых частей (18) являются их нулевые гармоники. Обозначим координаты $\vec{\xi}_1$ как $\bar{a}, \bar{\theta}$. Получаем осредненную систему первого приближения:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{\theta}_1 \end{pmatrix} \\ \frac{d\vec{\xi}_1}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{\theta}_1 \end{pmatrix} = \varepsilon \left\langle \vec{X}_1(\vec{\xi}_1) \right\rangle = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\bar{a}}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (20)$$

В координатах система (20) имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{a}_1' &= \varepsilon \frac{\bar{a}_1}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}_1^2}{4} \right) \\ \bar{\theta}_1' &= 0\end{aligned}\quad (21)$$

$$\bar{a}_1|_{t=0} = y^0, \quad \bar{\theta}_1|_{t=0} = 0$$

Интегрируя уравнение (21) разделением переменных получаем первое приближение для $\vec{x}(t)$ - решение $\vec{\xi}_1$ осредненной системы первого приближения (20):

$$a_1(t) = \frac{2y_0}{\sqrt{y_0^2 + (4 - y_0)^2 e^{-\varepsilon t}}}, \quad \theta_1 = 0 \quad (22)$$

Возвращаясь к исходной переменной $y(t)$ уравнения Ван-дер-Поля и обозначая через $y_1(t) = \bar{a}_1(t) \cos(t + \bar{\theta}_1(t))$ ее первое приближение, получаем, что при $t \rightarrow \infty$ $y_1(t) \rightarrow y_1^{стан}(t) = 2 \cos t$,

$y_1'(t) \rightarrow y_1'^{стат}(t) = -2 \sin t$. Таким образом, из формулы (22) непосредственно видно, что на фазовой плоскости (y, y') интегральные кривые Ван-дер-Поля стремятся к окружности $y^2 + y'^2 = 4$.

Множества точек на фазовой плоскости, притягивающие к себе интегральные кривые, называются *аттракторами*. В данном случае аттрактором для интегральных кривых уравнения Ван-дер-Поля в первом приближении является окружность радиуса 2 с центром в начале координат.

Не прибегая к точному решению (22), стационарную амплитуду можно найти как точки покоя уравнения (21), т.е. как решения уравнения

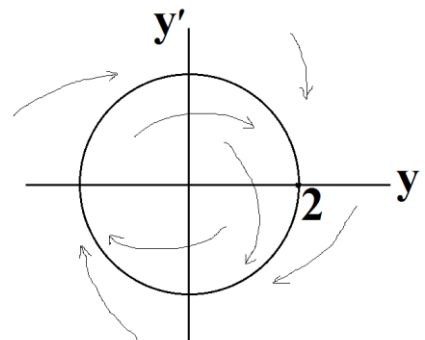
$$\frac{\bar{a}_1}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}_1^2}{4} \right) = 0$$

Таких решения два: $\bar{a}_1 = 0$ и $\bar{a}_1 = 2$.

Для первой точки имеем: $\left. \frac{\partial \langle X_1(\bar{a}_1) \rangle}{\partial \bar{a}_1} \right|_{\bar{a}_1=0} = \frac{1}{2} > 0$. Для второй:

$$\left. \frac{\partial \langle X_1(\bar{a}_1) \rangle}{\partial \bar{a}_1} \right|_{\bar{a}_1=2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} 2^2 = -\frac{1}{2} < 0.$$

Следовательно, стационарная точка $\bar{a}_1 = 0$ неустойчива, а точка $\bar{a}_1 = 2$ - устойчива. Интегральные кривые удаляются от начала координат фазовой плоскости и притягиваются к окружности радиуса 2.



Рассмотрим теперь *первое улучшенное приближение*. Оно имеет вид (14), где координаты $\vec{\xi}_1$ определяются формулами (22), а уравнения для

$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{1a} \\ u_{1\theta} \end{pmatrix}$ выглядят так:

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = \vec{X}_1 - \langle \vec{X}_1 \rangle = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{a}_1}{2} \cos 2(t + \bar{\theta}_1) + \frac{\bar{a}_1^3}{8} \cos 4(t + \bar{\theta}_1) \\ \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}_1^2}{4} \right) \sin 2(t + \bar{\theta}_1) - \frac{\bar{a}_1^3}{8} \sin 4(t + \bar{\theta}_1) \right] \end{pmatrix}$$

Интегрируя по t правые части, получаем:

$$\begin{pmatrix} u_{1a} \\ u_{1\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{a}_1^3}{32} \sin 4(t + \bar{\theta}_1) - \frac{\bar{a}_1}{4} \sin 2(t + \bar{\theta}_1) \\ \frac{\bar{a}_1^2}{32} \cos 4(t + \bar{\theta}_1) - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\bar{a}_1^2}{4} \right) \cos 2(t + \bar{\theta}_1) \end{pmatrix} \quad (23)$$

Второе приближение вычисляется, исходя из системы (15). В связи с тем, что выкладки получаются довольно громоздкими, выпишем сразу получающиеся уравнения для определения \bar{a}_2 и $\bar{\theta}_2$:

$$\begin{cases} \bar{a}_2' = \varepsilon \frac{\bar{a}_2}{2} \left(1 - \frac{\bar{a}_2^2}{4} \right) \\ \bar{\theta}_2' = -\varepsilon^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{\bar{a}_2^2}{8} + \frac{7\bar{a}_2^4}{256} \right) \end{cases} \quad (24)$$

Второе приближение, согласно (16), имеет вид $a_2(t) = \bar{a}_2 + \varepsilon u_{1a}$, $\theta_2(t) = \bar{\theta}_2 + \varepsilon u_{1\theta}$, где \bar{a}_2 и $\bar{\theta}_2$ определяются системой (24), а компоненты \vec{u}_1 указаны в (23).

Уравнение для \bar{a}_2 в (24) не изменилось по сравнению с первым приближением, поэтому с течением времени и $\bar{a}_2 \rightarrow 2$. При этом

уравнение для $\bar{\theta}_2$ принимает вид: $\bar{\theta}_2' = -\frac{1}{16}\varepsilon^2$. Отсюда, $\bar{\theta}_2 = -\frac{1}{16}\varepsilon^2 t + \theta_0$.

Получаем стационарное решение:

$$\begin{aligned} a_2^{стат}(t) &= 2 - \frac{\varepsilon}{2} \sin 2(\omega t + \theta_0) + \frac{\varepsilon}{4} \sin 4(\omega t + \theta_0) \\ \theta_2^{стат}(t) &= \left(\theta_0 - \frac{\varepsilon^2}{16} t \right) + \frac{\varepsilon}{4} \cos 2(\omega t + \theta_0) + \frac{\varepsilon}{8} \cos 4(\omega t + \theta_0) \end{aligned} \quad (25)$$

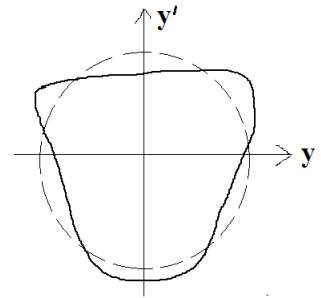
где $\omega = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}$.

Подставляя формулы (25) в выражение $y^{стат}(t) = a^{стат}(t) \cos(t + \theta^{стат})$ и удерживая слагаемые порядка ε , получаем второе приближение стационарного колебательного решения уравнения Ван-дер-Поля:

$$y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} y^{стат}(t) = 2 \cos \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16} \right) t + \theta_0 \right) - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3 \left(\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{16} \right) t + \theta_0 \right)$$

На фазовой плоскости аттрактор представляет собой окружность с центром в нуле и радиусом, равным 2, «помятую» на величину $\sim \varepsilon$.

Таким образом, уточняется вид аттрактора.



§3. Метод ВКБ (Венцеля, Крамерса и Бриллюэна)

Пусть требуется найти фундаментальную систему решений уравнения

$$\mu^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + [Q(x)]^2 y(x) = 0 \quad (1)$$

на отрезке $a \leq x \leq b$, при этом μ - некоторое малое число, а $Q(x) > 0$ - заданная дважды непрерывно дифференцируемая функция. Такие уравнения возникают, например, в квантовой механике, когда требуется решить уравнение Шредингера, при условии что $E > U(x)$:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + (E - U(x)) \psi(x) = 0$$

Решение вырожденного уравнения (1) (при $\mu = 0$) тождественно равно нулю. Поэтому, прежде всего, нужно так преобразовать (1), чтобы можно было выделить основную часть решения, вокруг которой строятся дополнительные асимптотически малые добавки. Для этого в уравнении (1) сделаем замену искомой функции:

$$y(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{Q(x)}} \quad (2)$$

Тогда

$$y_{xx} = \frac{\varphi_{xx}}{\sqrt{Q}} - \frac{\varphi_x Q_x}{Q^{3/2}} - \frac{\varphi Q_{xx}}{2Q^{3/2}} + 3 \frac{\varphi Q_x^2}{Q^{5/2}}. \quad (3)$$

Теперь сделаем замену аргумента:

$$t = \frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \quad (4)$$

При этом:

$$\varphi_x = \varphi_t \frac{Q}{\mu} \quad \text{и} \quad \varphi_{xx} = \varphi_{tt} \left(\frac{Q}{\mu} \right)^2 + \frac{\varphi_t Q_x}{\mu} \quad (5)$$

Подставляя формулы (2) – (5) в уравнение (1), преобразуем его к виду:

$$\varphi_{tt} + (1 - \mu^2 P(x)) \varphi = 0 \quad (6)$$

где переменные x и t связаны соотношением (4), а $P(x)$ - представляет собой известную непрерывную функцию:

$$P(x) = \frac{Q_{xx}}{2Q^3} - 3 \frac{Q_x^2}{Q^4}$$

Вырожденным решением уравнения (6) (при условии, что $\mu = 0$) будет функция $\bar{\varphi}(t) = A \sin t + B \cos t$. Сравним $\varphi(t)$ и $\bar{\varphi}(t)$ такие, что

$$\varphi(a) = \bar{\varphi}(a), \quad \varphi'(a) = \bar{\varphi}'(a) \quad (7)$$

Рассмотрим разность $r(t) = \varphi(t) - \bar{\varphi}(t)$. Подставляя $r(t)$ в уравнение (6), с учетом граничных условий (7), получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} r_{tt} + r = \mu^2 P(r + \bar{\varphi}) \\ r(0) = r'(0) = 0 \end{cases}$$

Ее решение дается формулой:

$$r(t) = \mu^2 \int_0^t r(\tau) \sin(t - \tau) P(\tau) d\tau + F(t) \quad (8)$$

$$\text{где } F(t) = \mu^2 \int_0^t \bar{\varphi}(\tau) \sin(t - \tau) P(\tau) d\tau$$

Обозначим $\sup_{a \leq x \leq b} |P(x)| = P_0$, $\sup_{a \leq x \leq b} |\bar{\varphi}P| = C_1$, $(b-a) \sup_{a \leq x \leq b} Q = C_2$,
 $\sup_{a \leq x \leq b} |r(x)| = r_0$.

Из формулы (4) следует $t \leq \frac{C_2}{\mu}$. С учетом этого, из (8) получаем

$|r(t)| \leq \mu^2 t r_0 P_0 + \mu^2 t C_1 \leq \mu r_0 P_0 C_2 + \mu C_1 C_2$. Эта оценка выполнена для любого $r(t)$, следовательно, и для r_0 . Получаем, что

$$r_0 \leq \frac{\mu C_1 C_2}{1 - \mu P_0 C_2} = \underline{O}(\mu).$$

Таким образом, с точностью до членов порядка μ фундаментальная система решений уравнения (1) будет выглядеть так:

$$y(x) = \frac{A \sin \left(\frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \right) + B \cos \left(\frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \right) + \underline{O}(\mu)}{\sqrt{Q(x)}}$$

Действуя аналогичным образом, можно получить, что для уравнения

$$\mu^2 \phi_{xx}(x) - Q^2(x) \phi(x) = 0$$

фундаментальная система решений будет иметь вид

$$\phi(x) = \frac{A \exp \left(\frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \right) + B \exp \left(-\frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \right) + \underline{O}(\mu)}{\sqrt{Q(x)}}$$

Глава 4. Некоторые новые объекты математического моделирования

§1. Вейвлет-анализ.

Рассмотрим пример, из которой понятно содержание и смысл вейвлет-анализа. С начала 17 века по настоящее время астрономы ведут наблюдения за изменением солнечной активности, изучая пятна на солнце, порожденными выбросами плазмы.

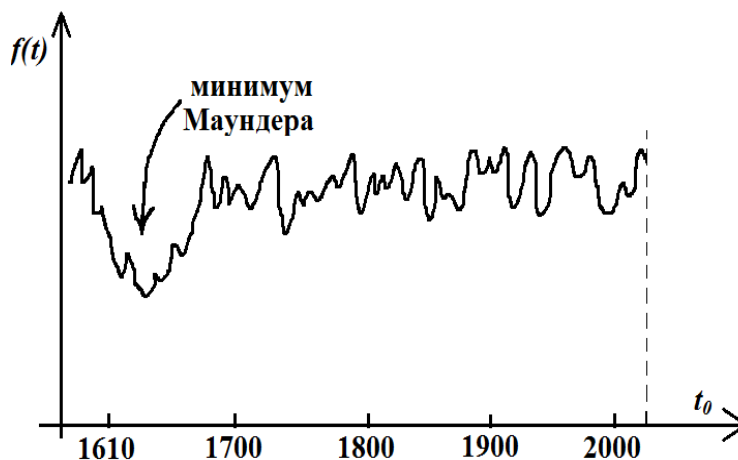


Рис. 1

Обозначим среднегодовое количество пятен как $f(t)$. Характер этой функции изображен на рисунке. Солнечная активность меняется, с периодом примерно в 11 лет. Но это изменение не является строго периодическим.

Возникает вопрос – имеются ли колебания других периодов? Наиболее простой путь поиска ответа на поставленный вопрос – это применить разложение в спектр Фурье:

$$F(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (1)$$

где t_1 начало наблюдений -1610 год, когда Галилей направил на Солнце свою подзорную трубу, а t_2 настоящее время. Однако такой путь имеет существенные недостатки. Первый из них состоит в том, что разложение (1) может давать искаженные результаты. Как известно, преобразование Фурье будет строгим, если брать интеграл по всей действительной прямой:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt$$

В связи с отсутствием данных приходится брать интеграл по отрезку (t_1, t_2) , а не по всей числовой прямой, что эквивалентно внесению искажения в $f(t)$. Поскольку преобразование Фурье является некорректной задачей, то это может приводить к большим погрешностям в определении $F(\omega)$, в том числе к появлению лишних пиков, не имеющих под собой физического содержания.

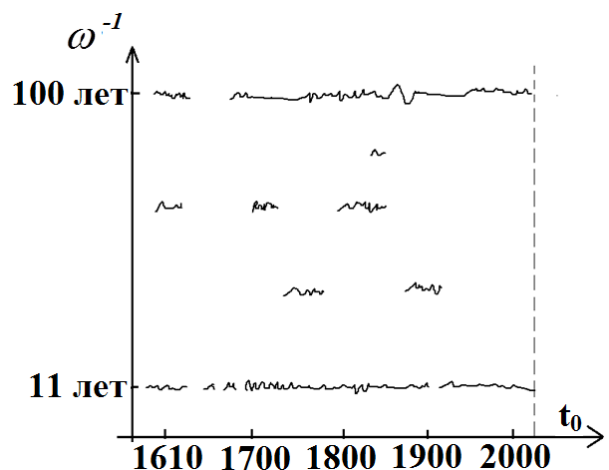
Второй недостаток состоит в том, что функция $F(\omega)$ характеризует спектральный состав сразу за весь период наблюдения, как бы в среднем, а на рис.1 видно, что интенсивность колебаний $f(t)$ менялась от века к веку. Представляет интерес вопрос о том, как меняются частотные характеристики с течением времени.

В 1980 году Морле предложил следующее преобразование:

$$F(\omega, t_0) = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \psi(\omega, t_0, t) dt \quad (2)$$

которое стало называться вейвлет-преобразованием. Морле использовал ядро $\psi(\omega, t_0, t) = e^{i\omega(t-t_0)} e^{-a(t-t_0)^2}$. Функция $\psi(\omega, t_0, t)$ представляет собой волновой пакет с огибающей $e^{-a(t-t_0)^2}$, которая убывает при отклонении t от t_0 . Поэтому функция $F(\omega, t_0)$ дает представление о частотных составляющих функции $f(t)$ в окрестности t_0 . Кроме того, отсутствие информации об $f(t)$ при $t \notin (t_1, t_2)$ не сказывается на $F(\omega, t_0)$, при t_0 далеких от концов интервала интегрирования.

На рисунке приведен примерный вид получаемого результата. Затемнение определяет величину

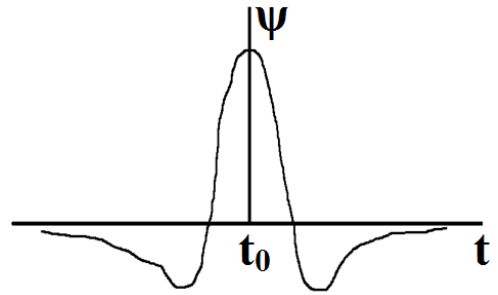


$|F(\omega, t_0)|$. Видно, что кроме периода в 11 лет в солнечной активности присутствуют и другие периоды, самый существенный из них порядка 100 лет. Амплитуда спектральных характеристик меняется. Например, заметно падение, приходящееся на минимум Маундера.

Сильной стороной преобразования Фурье является простота его обратного преобразования. Можно показать, что для вейвлет-преобразования также существует обратное, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega, t_0, t) dt = 0 \quad (3)$$

У Морле условие (3) строго не выполняется, но при малых значениях коэффициента a выполняется приближенно. Условие (3) строго выполняется, например, для следующей функции, прозванной за форму графика «мексиканской шляпой»:



$$\psi(\omega, t_0, t) = \left(1 - \omega^2(t - t_0)^2\right) e^{-\frac{\omega^2}{2}(t - t_0)^2}$$

При выполнении (3) обратное преобразование существует, но вид его достаточно сложный. Пусть $\psi = \psi(\omega(t - t_0))$ и известна функция

$W(\omega, t_0) = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi^*(\omega(t - t_0)) dt$. Тогда обратное преобразование имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{5/2} \left(\int_0^{\infty} \psi(\omega(t - t_0)) W(\omega, t_0) dt_0 \right) d\omega$$

где $c = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\omega)|}{|\omega|} dt$, а $\psi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega t) e^{i\omega t} dt$.

Таким образом, достоинством рассматриваемого подхода является именно прямое вейвлет-преобразование, дающее большую информацию о спектральных характеристиках, чем преобразование Фурье. В то же время, корректность преобразования (2) позволяет использовать функцию $F(\omega, t_0)$ для получения дополнительной информации. Рассмотрим это на следующем примере.

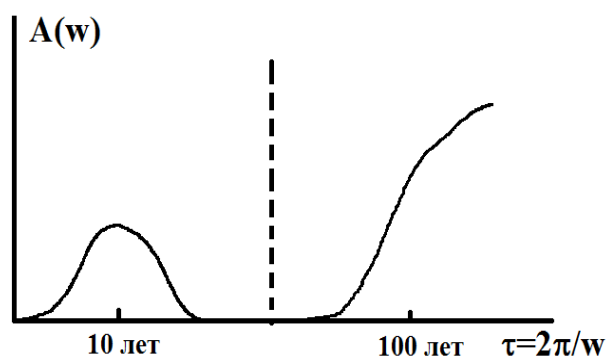
Для центральной Англии имеются данные наблюдений среднегодовой температуры, начиная с 1659 года. Они имеют примерно такой же вид, какой изображен на рисунке 1.

Подвергнув имеющуюся зависимость вейвлет-преобразованию была получена функция $F(\omega, t_0)$. Для

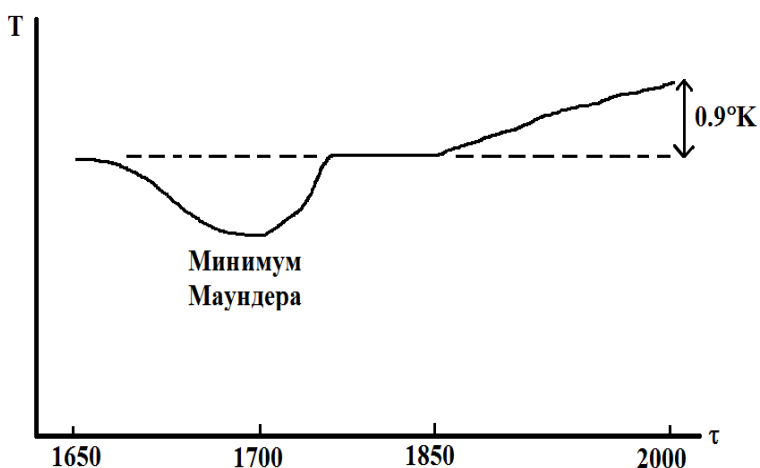
вейвлет-преобразования аналогом Фурье-образа будет

функция:
$$A(\omega) = \int_{t_1}^{t_2} F(\omega, t_0) dt_0.$$

В рассматриваемом примере она имеет вид, показанный на рисунке. Обнуляя функцию $A(\omega)$ левее пунктира на рисунке (отсекая тем самым колебания высокой частоты - порядка 10 лет) и совершая обратное преобразование для оставшейся части функции $A(\omega)$, получаем представления о медленных изменениях климата.



Было получено, что потепление началось до начала интенсивной индустриальной деятельности человечества, а значит оно не связано с загрязнением окружающей среды.



§2. Фракталы.

Фракталы – это структуры, состоящие из частей, которые в каком-то смысле подобны целому. Еще в 1883 г. Георг Кантор описал множество, которое теперь называют множеством Кантора или пылью Кантора.

Рассмотрим отрезок единичной длины. Разделим его на три части и удалим из него открытую среднюю часть, оставив ее концевые точки. Получим два отрезка длиной по $1/3$ каждый. Вырежем среднюю треть из каждого отрезка и будем повторять эту процедуру с вновь полученными отрезками до бесконечности.



Этапы построения множества Кантора

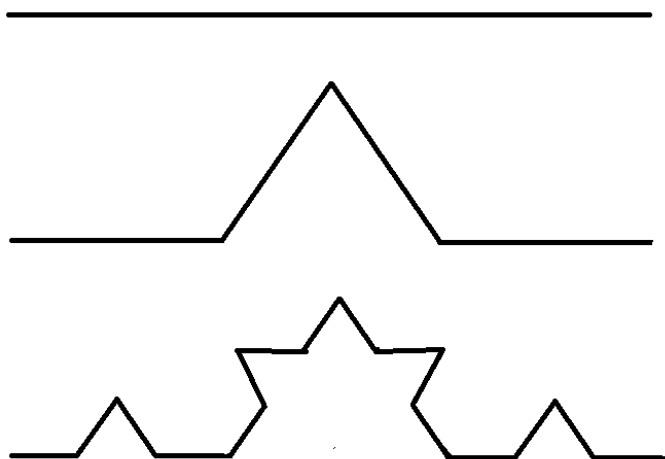
Полученное в бесконечном пределе множество называют множеством Кантора. Оно обладает рядом необычных свойств. Это множество имеет мощность континуума, в то время как его мера равна нулю. Каждый из фрагментов множества Кантора выглядит, как все множество в целом. Говорят, что такое множество самоподобно.

В 1886 г. Карл Вейерштрасс построил непрерывную функцию, не имеющую производной ни в одной точке: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \cos(B^n \pi x)$ где

$0 < A < 1$, а произведение AB достаточно велико. График этой функции – бесконечно изломанная линия. При увеличении любой участок этой кривой выглядит подобно всей кривой. Можно построить множество разнообразных функций, подобных функции Вейерштрасса.

В 1904 г. Хелге фон Кох рассмотрел необычную кривую. Часто ее приводят в курсе математического анализа как пример непрерывной, но недифференцируемой кривой. Рассмотрим отрезок единичной длины.

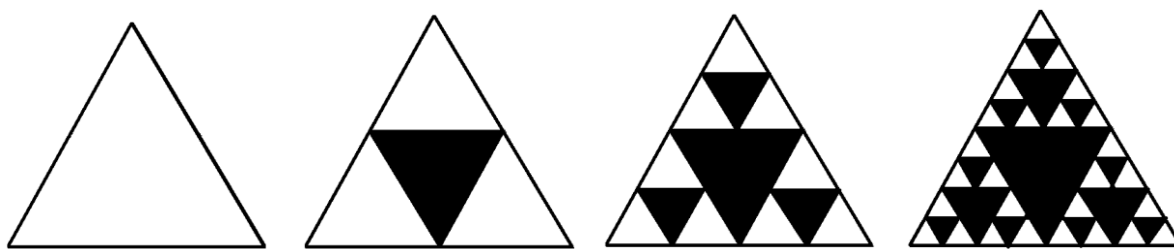
Удалим из него среднюю треть и дополним двумя отрезками длиной $1/3$. Отрезок превратится в ломанную из 4 звеньев. Применим ту же самую процедуру к каждому из отрезков ломанной. Будем повторять эту процедуру бесконечное число раз.



Этапы построения кривой Коха.

Можно также построить снежинку Коха или остров Коха, используя в качестве начального объекта равносторонний треугольник. Легко понять, что такая снежинка будет иметь бесконечный периметр, но ограничивать будет при этом конечную площадь.

В 1915 г. Вацлав Серпинский придумал несколько интересных конструкций, названных впоследствии его именем. Прокладка Серпинского или салфетка Серпинского получается из равностороннего треугольника. Проведем в треугольнике средние линии и удалим ограниченную ими центральную часть треугольника. Повторим эту процедуру по отношению к каждому из полученных треугольников и так до бесконечности.



Этапы построения прокладки Серпинского.

Подобным же образом можно получить ковер Серпинского, используя в качестве исходного объекта квадрат. Можно построить и трехмерные аналоги этих объектов. Их часто называют губками.

Таких примеров можно привести довольно много.

Если разделить единичный отрезок на N равных частей длиной l , то очевидно, что длина исходного отрезка будет равна $1 = Nl$. Если разбить единичный квадрат на N равных квадратов со стороной $l = \frac{1}{\sqrt{N}}$, то площадь исходного квадрата будет равна $1 = Nl^2$. Если разбить единичный куб на N равных кубов со стороной $l = \frac{1}{\sqrt[3]{N}}$, то площадь исходного квадрата будет равна $1 = Nl^3$. Во всех случаях выполнялось соотношение $Nl^d = 1$, где d – размерность самоподобия. В рассмотренных случаях она выражалась целым числом и совпадала с Евклидовой размерностью. В общем случае размерность самоподобия может быть вычислена по формуле:

$$d = -\frac{\ln N}{\ln l}$$

Найдем размерность самоподобия для множества Кантора.

$$d = -\frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.6309. \text{ Размерность самоподобия оказалась дробной.}$$

Аналогично получаем, что для салфетки Серпинского

$$d = -\frac{\ln 3}{\ln \frac{1}{2}} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.5850 \text{ и для кривой Коха } d = -\frac{\ln 4}{\ln \frac{1}{3}} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.2618.$$

Самоподобные структуры дробной размерности называются фракталами.

Множество физических объектов имеют фракталоподобную структуру. Типичные природные фракталы – деревья, реки, облака, береговая линия. Фракталами являются дендриты (от греч. дендрон – дерево). Дендритоподобные структуры возникают в различных областях физики, например, при кристаллизации металлов. Дендритоподобную структуру имеет обыкновенная снежинка.

К фрактальным структурам можно отнести также так называемые аэрогели – твердые тела, состоящие из связанных между собой микрочастиц, составляющих жесткий каркас, который занимает лишь малую часть общего объема.

В человеческом организме множество фрактальных образований в структуре дыхательной, кровеносной и нервной систем, губчатой структуре костей.

При моделировании физических процессов с объектами, имеющими фрактальную структуру, чаще всего встает вопрос о соотношении между площадями поверхности и объемами фрактальной структуры и ее частей при различной подробности описания объекта.

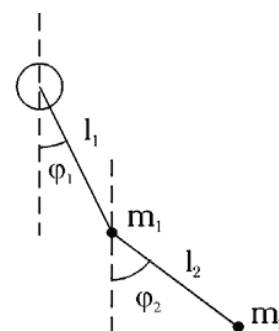
§3. Детерминированный хаос.

Не было гвоздя - подкова пропала.
Не было подковы – лошадь захромала.
Лошадь захромала – командир убит.
Конница разбита – армия бежит.
Враг вступает в город, пленных не щадя,
Оттого, что в кузнице не было гвоздя.
С.Я.Маршак

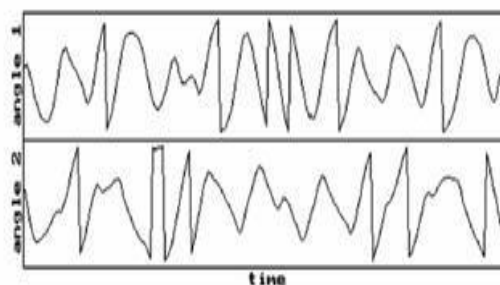
Мы привыкли к тому, что задание начальных условий — координат и импульсов — однозначно определяет последующую эволюцию механической системы. Известно изречение Лапласа: "Дайте мне начальные условия, и я предскажу будущее мира". В сознании большинства естествоиспытателей, вплоть до недавнего времени, сохранялась эта уверенность в предсказуемости поведения систем, описываемых классической механикой. Однако исследования последних 50 лет показали, что не все так просто. Встречаются задачи, в которых процесс подчинен определенным законам, но выглядит, как беспорядочный. Уверенность в возможности предсказания поведения детерминированной системы зиждется на интуитивном представлении о том, что малые изменения начальных условий ведут к малому изменению решения. Если это не так и малые флуктуации начальных условий приводят к существенному изменению решения, то создается впечатление о том, что решение хаотично.

Еще в конце XIX века французский математик А. Пуанкаре обнаружил, что в некоторых механических системах, эволюция которых определяется уравнениями Гамильтона, возможно непредсказуемое поведение решения. Впоследствии было показано, что таких систем в механике, названных неинтегрируемыми, много.

Пример — это двойной плоский маятник с точечными массами m_1 и m_2 , изображенный на рисунке. Две степени свободы — это два угла φ_1 и φ_2 .

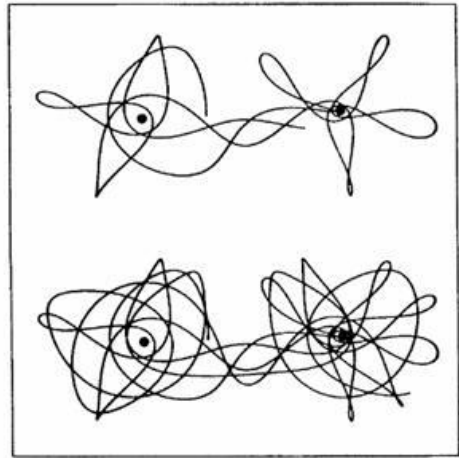


Если отклонение от положения равновесия мало, то система, как и в случае простого маятника, совершает регулярные гармонические колебания. Однако при увеличении полной энергии наступает такой момент, когда колебания становятся хаотическими.



Два близких начальных условия приводят, в конце концов, к совершенно различной динамике этой системы с двумя степенями свободы.

Другой классический пример неинтегрируемой системы — это известная задача трех тел. Частным случаем последней является движение частицы в гравитационном поле двух неподвижных точечных масс. Даже если движение происходит в одной плоскости, траектория частицы выглядит чрезвычайно сложной и запутанной. Она



то обвивается вокруг одной из масс, то неожиданно перескакивает к другой. На рисунке сверху показана начальная часть траектории, а внизу ее продолжение. Первоначально близкие траектории очень быстро расходятся.

Открытие, сделанное Пуанкаре, осталось незамеченным. Спустя 70 лет его повторил метеоролог Э.Лоренц, решая совершенно другую задачу о тепловой конвекции жидкости. Слой жидкости конечной толщины подогревается снизу так, что между верхней — холодной и нижней — горячей поверхностями поддерживается постоянная разность температур. Нагретая жидкость вблизи дна, расширяясь, стремится подняться вверх. И наоборот, холодная вблизи верха жидкость — опуститься вниз. Максимально упрощая уравнения Навье-Стокса, описывающие это явление, Лоренц случайно наткнулся на то, что даже сравнительно простая система из трех связанных нелинейных дифференциальных уравнений 1-го порядка может иметь решением совершенно хаотические траектории.

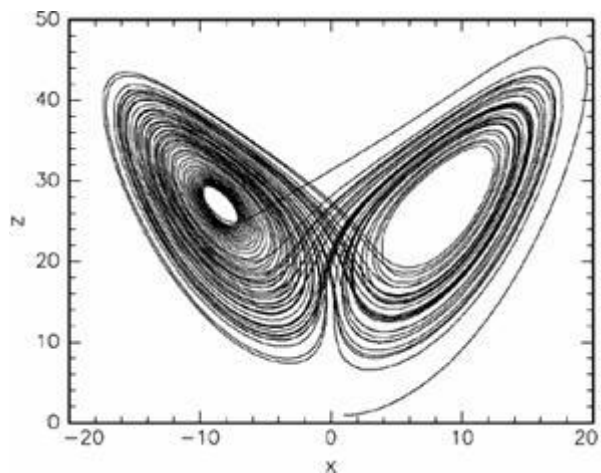
Эта система уравнений, ставшая теперь классической, имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - x), \quad \frac{dy}{dt} = \beta x - xz - y, \quad \frac{dz}{dt} = xy - \gamma z$$

Здесь переменная x пропорциональна скорости конвективного потока; y описывает разность температур для потоков вверх и вниз; z —

характеризует отклонение профиля температуры от линейного в продольном направлении, вдоль приложенного градиента температуры; α , β и γ параметры. Решение этих уравнений — функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ — определяют траекторию системы в трехмерном фазовом пространстве x, y, z . Ввиду однозначности функций, стоящих в правых частях этих уравнений, траектория себя никогда не пересекает.

Лоренц исследовал вид этих траекторий при разных начальных условиях для некоторого набора параметров (α, β, γ) . Он обнаружил, что траектория хаотическим образом блуждает из полупространства $x > 0$ в полупространство $x < 0$, формируя две почти плоских, перепутанных сложным образом спирали.



На рисунке показана проекция этих спиралей на плоскость xz для некоторого начального условия. Траектория сначала делает 1 оборот справа, затем 20 слева, затем опять 1 справа, затем 4 — слева и так далее. Похожее поведение было найдено и при других значениях параметров. Изначально близкие кривые сильно расходятся. Создается впечатление, что процесс носит произвольный непредсказуемый характер, в то время, как на самом деле он детерминирован.

Подобные проявления детерминированного хаоса встречаются во многих задачах математики, физики, биологии, информатики, экономики, финансов. Исследование вопросов, связанных с этими задачами является одним из новых направлений математического моделирования.

§4. Синергетика.

Процессы, влияющие друг на друга, называются синергетическими (от греческого «совместные»). Классические модели, описывающие такие процессы, выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = P(x, y) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = Q(x, y) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \end{cases}$$

Например, система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = a + yx^2 - (b+1)x + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -yx^2 + bx + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \end{cases}$$

имеющая рассматриваемую структуру была названа «брюсселятором».

Можно показать, что при разных значениях коэффициентов a и b могут возникать бегущие импульсы, стоячие волны, автоколебания и стационарные структуры. Исследование подобных процессов является относительно новым направлением моделирования.

В нашем курсе мы сталкивались с явлением взаимного влияния нелинейных процессов друг на друга с образованием устойчивых колебаний. Это было в задаче «хищник-жертва».

§5. Метод обратной задачи рассеяния

Уравнение Кортевега - де Фриза

Уравнением Кортевега - де Фриза называется уравнение

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

Это уравнение, во-первых, описывает процесс распространения волн на «мелкой воде», когда длина волн сопоставима с толщиной слоя воды. (Габов «Введение в теорию нелинейных волн»); во-вторых, оно удобно, как модельное уравнение нелинейного переноса, поскольку учитывает ряд факторов. А именно, рассмотрим такие слагаемые уравнения:

$$u_t - uu_x = 0$$

Эта комбинация описывает эффект возрастания крутизны фронта волны.

Слагаемое u_{xxx} отвечает за дисперсию волн.

Рассмотрим уравнение:

$$u_t + u_{xxx} = 0 \tag{2}$$

Будем искать его решение в виде $u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)}$. Подставляя искомый вид решения в уравнение, получаем:

$$(i\omega - ik^3)e^{i(\omega t - kx)} = 0$$

Откуда $k = \sqrt[3]{\omega}$. Таким образом, решение уравнения (2) представимо в виде: $u(x, t) = e^{i\omega\left(t - \frac{x}{\omega^{2/3}}\right)}$, т.е. скорость распространения волны зависит от ее частоты.

Кроме того, у уравнения (1) имеется бесконечно много законов сохранения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = const,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(x, t) dx = const$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[u^3(x, t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx = const$$

и т.д.

Схема метода обратной задачи рассеяния

Этот метод используется для построения решения уравнения Кортевега - де Фриза, нелинейного уравнения Шредингера, уравнения Гордона $u_{tt} - u_{xx} = \sin u$ и некоторых других задач. Он интересен тем, что с его помощью удастся свести решение нелинейного уравнения к решению нескольких линейных задач.

Технически метод весьма сложен, поэтому здесь рассматривается лишь его схема.

Решение по методу обратной задачи рассеяния состоит из нескольких этапов.

Прямая задача рассеяния

Пусть $u(x, t)$ - быстро убывающая функция, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |x|) u(x, t) dx < \infty.$$

Задача I

Рассмотрим решение уравнения, типа уравнения Шредингера:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u(x, t))\psi = 0 \tag{3}$$

на бесконечном участке $-\infty < x < \infty$. Считаем потенциал u заданной функцией. t в уравнении (3) участвует, как параметр. Требуется определить значения λ , при которых существует нетривиальная, нормированная на единицу функция ψ , удовлетворяющая уравнению (3).

Поскольку u убывает на бесконечности, то при больших x решение (2) выглядит, как $e^{\pm\sqrt{-\lambda}x}$. Условие нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^2 dx = 1$ может быть выполнено только при $\lambda < 0$. Функция $\psi_m(x, t)$ имеет на бесконечности асимптотику $\psi_m(x, t) \sim C_m e^{-\eta_m x}$, где $\eta^2 = -\lambda$.

Решая задачу (3), находим $\{C_m, \eta_m\}$ по заданной $u(x, t)$.

Задача II

Пусть функция ψ имеет составляющую e^{-ikx} - волну идущая из бесконечности. Ищем результат рассеяния этой волны на неоднородности u . Иными словами, по заданной функции $u(x, t)$ из уравнения

$$\psi_{xx} + (k^2 - u(x, t))\psi = 0 \quad (4)$$

нужно рассчитать проходящую и отраженную часть ψ . Характер асимптотики в этом случае будет следующим:

$$\begin{cases} \psi(x, t) \sim e^{-ikx} + b(k, t)e^{ikx}, & x \rightarrow \infty \\ \psi(x, t) \sim a(k, t)e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Решая задачу (4), находят $\{b(k, t)\}$ по заданной функции $u(x, t)$ для всех k . Совокупность $\{C_m(t), \eta_m(t), b(k, t)\}$ называется данными рассеяния.

Обратная задача рассеяния

Составляем функцию $B(x, t) = \sum_m C_m^2(t) e^{-\eta_m(t)x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, t) e^{ikx} dk$.

Далее решаем линейное интегральное уравнение Гельфанда – Левитана:

$$K(x, y, t) + B(x + y, t) + \int_x^\infty B(y + \alpha, t) K(x, \alpha, t) d\alpha = 0 \quad (5)$$

Можно показать, что

$$u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, x, t) \quad (6)$$

Таким образом, функция может быть построена по данным рассеяния. Обратим внимание на то, что все указанные выше задачи являются линейными.

Применение метода обратной задачи рассеяния к решению задачи Коши с уравнением Кортевега - де Фриза.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases} \quad (7)$$

Существует доказательство того, что для функции $u(x, t)$ являющейся решением уравнения Кортевега - де Фриза выполнено:

$$\begin{cases} C_m(t) = C_m(0) e^{4\eta_m^3 t} \\ b(k, t) = b(k, 0) e^{8ik^2 t} \end{cases} \quad (8)$$

а η_m не зависит от времени.

Используя это, можно найти решения задачи (7) следующим образом. Решаются прямые задачи (I) и (II) для функции $u(x, 0) = \varphi(x)$. Находится совокупность данных рассеяния $\{C_m(0), \eta_m, b(k, 0)\}$. По ним, используя (8), строится совокупность $\{C_m(t), \eta_m, b(k, t)\}$. По этой совокупности, решается обратная задача рассеяния и определяется функцию $u(x, t)$, являющаяся решением (7)

Пример:

$$\text{Пусть } u(x, 0) = -\frac{2}{ch^2 x}$$

Тогда уравнение (3) будет выглядеть следующим образом:

$$\psi_{xx} + \left(\lambda + \frac{2}{ch^2 x} \right) \psi = 0$$

В этом случае имеется всего одна собственная функция, $\eta_1 = 1$ и $C_1(0) = \sqrt{2}$. Решая (4) можно найти, что $b(k, 0) = 0$. При этом $B(x, t) = 2e^{8t-x}$.

Уравнение (5) принимает вид:

$$K(x, y, t) + 2e^{8t-x-y} + 2e^{t-y} \int_x^\infty K(x, \alpha, t) e^{-\alpha} d\alpha = 0$$

Его решением будет функция $K(x, y, t) = \frac{-2e^{x-y}}{1 + e^{2x-8t}}$. Используя (6) находим решение задачи:

$$u(x, t) = \frac{-2}{ch^2(x - 4t)} \quad .$$

Найденная в этом примере функция $u(x, t)$ представляет собой солитон. Солитоны – это решения в виде уединенных бегущих волн колоколообразной формы. Если начальные условия задать так, что возникают несколько солитонов, движущихся с различными скоростями, то можно рассматривать их взаимодействие в рамках решения уравнения. Солитоны уравнения Кортевега - де Фриза при взаимодействии ведут себя частицеподобным образом. Сталкиваясь, они расходятся, не меняя формы

и приобретая сдвиг по фазе. Такой характер солитонных решений делает их интересным объектом математического моделирования.

Литература.

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики, Москва, 1977.
2. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике, Москва, 1993.
3. Калиткин Н.Н. Численные методы: учебное пособие, СПб, 2011.
4. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения, Москва, 1980.
5. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры, Москва, 2002.
6. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование, Москва, 2002.