МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ И СИСТЕМАМИ

Математические модели как один из методов моделирования являются наиболее мощным инструментом исследования сложных систем различной природы. Опираясь на достижения современной математики, этот инструмент обеспечивает решение многих практических задач. Доставляя исследователю теоретически подтвержденные и обоснованные решения, обладая мощнейшим аппаратом решения задач, математическое моделирование вместе с тем имеет и определенные недостатки. Связаны они не столько с объективными причинами, а скорее с постоянно продолжающимся процессом постановки новых, все более сложных задач, что в свою очередь заставляет непрерывно развиваться и как таковую математику. И, конечно, сама математика, находясь в непрерывном развитии, не только предлагает практикам все новые и новые методики и методы исследования, но и открывает возможности изучения все более и более сложных объектов.

С точки зрения моделирования систем математическое моделирование, к сожалению, не позволяет пока исследовать сложные, в основном организационные, системы. Связано это с тем, что названные системы настолько разнообразны и разнородны по возможностям математического описания их элементов, что возникает задача объединения различных математических аппаратов. В настоящее время данная задача решается посредством имитационного моделирования. А это численный эксперимент, дающий частные результаты.

Очевидно, что наиболее продуктивные и глубокие результаты следует ожидать от математического моделирования, но практические исследования сложных систем приводят к необходимости использования имитации. По-видимому, это объективно параллельный процесс — развивается аппарат математического моделирования, но одновременно усложняются и исследуемые системы.

Далее мы будем рассматривать математическое моделирование не в форме традиционного описания методик и методов, примеров и полученных результатов, а совместим такое изложение с взаимной увязкой с ранее и позднее изучаемыми дисциплинами учебного плана бакалавра. Такой подход основан на монографии Р. Ли.

Следуя Р. Ли, выделим пять крупных классов, решаемых с помощью математического моделирования. Часть из них прямо связана с решением задач управления, а часть обеспечивает решение задач анализа объектов исследования. Но во всех случаях получаемый результат достигается с условием его приближения к неким идеальным, желаемым состояниям. Поиск оптимального решения — это, пожалуй, основная цель существования большинства людей.

В самом общем виде типичную задачу оптимизации можно разложить на следующие составляющие:

- определение цели;
- уяснение текущего положения по отношению к цели;
- описание внешних и внутренних факторов, влияющих на прошлое, настоящее и будущее состояния системы;
- составление наиболее приемлемой стратегии достижения цели.

Все эти составляющие в полном объеме находят отражение в описываемых ниже классах математических моделей.

3.1. ДЕТЕРМИНИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу (рис. 3.1).

Рис. 3.1
Детерминированное управление

На приведенной схеме имеют место объект и измерительное устройство M. Последнее предназначено для фиксации выходного сигнала объекта $x(t)$ в другой, необходимой и понятной исследователю форме — измеренном сигнале $z(t)$. Наличие и необходимость измерителя в данной задаче не столь очевидны в сравнении с другими, рассматриваемыми ниже задачами, когда на объект или измеритель воздействуют внешние помехи. Входной сигнал объекта $u(t)$ носит название управляющего и является выходным сигналом неизвестного устройства управления.

В задаче даны динамические соотношения, описывающие объект и измеритель. Последнее означает, что исследователь обладает математической моделью (динамическое соотношение), адекватно описывающей функционирование объекта или измерителя. Иными словами, исследователю известно как объект перерабатывает управляющий сигнал $u(t)$ в выходной сигнал объекта $x(t)$ или как измеритель перерабатывает свой входной сигнал $x(t)$ в измеренный выход $z(t)$. Знание характера отображения этих преобразований во времени выражается в том, что все сигналы зависят от времени t и сами соотношения названы динамическими.

Необходимо отыскать такое управление $u(t)$, чтобы выход объекта $x(t)$ или измеренный выход $z(t)$ были как можно ближе к желаемым $x^*(t)$ или $z^*(t)$.

Конечно, термин «желаемый» невозможно определить математически. Но как только данная (и любая рассматриваемая ниже) задача будет конкретизироваться для реального объекта и измерителя, сразу же открывается возможность количественно выразить желаемые значения $x^*(t)$ и $z^*(t)$ и сформулировать критерий близости выходного или измеренного сигнала к необходимым, желаемым значениям.

Методы решения данного класса задач можно разделить на две категории — аналитические и численные. И они изучаются в курсе «Высшая математика» и в специальном курсе «Вычислительная математика».

Отличие аналитических и численных методов является прямым отражением тех отличий, которые разделяют математическое и имитационное моделирование. Главное же отличие состоит в том, что если решение получено, то оно распространяется на целый класс задач, а не одну специфическую задачу. Именно это и придает большое теоретическое значение аналитическим методам.

3.1.1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Классическим аналитическим методом решения одного из вариантов рассматриваемой задачи является задача дифференциального исчисления. Рассмотрим скалярную функцию $z = z(x, u)$ без ограничений, где x и u соответственно n- и m-мерные векторы. Необходимо найти такие x и u, при которых z достигает минимума.

Необходимые условия имеют следующий вид:

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx = \mathbf{0}.$$

Так как приращения du и dx произвольны, то градиенты $\partial y/\partial u$ и $\partial y/\partial x$ должны равняться нулю в стационарной точке.

Для нахождения достаточных условий рассмотрим разложение в ряд Тейлора в окрестности стационарной точки:

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + [dx', du'] \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial u} \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \cdot \partial u} & \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ du \end{bmatrix} + \ldots =$$

$$= \mathbf{0} + \mathbf{0} + [dx', du'] \cdot [\mathbf{D}] \cdot \begin{bmatrix} dx \\ du \end{bmatrix} + \ldots$$

Если стационарная точка является точкой минимума, то $\delta z > \mathbf{0}$, если точкой максимума, то $\delta z < \mathbf{0}$. Если $\delta z = \mathbf{0}$, то мы имеем дело с особой точкой — точкой разрыва, точкой перегиба и т. д. В первом случае матрица **[D]** должна быть положительно определенной (условие Лежандра — Клебша).

Пример 3.1. Пусть объект на рисунке 3.1 описывается соотношением $x = 2 \cdot u$, а измеритель — соотношением $z = e^{-ax}$.

Нам необходимо найти такое управление u, чтобы измеренный выход стремился к единице ($z^* = 1$).

Решение 3.1. Используя данные динамические соотношения, найдем зависимость измеренного выхода z от управления

$$z = e^{-2au}. \tag{3.1}$$

В качестве критерия оценки близости измеренного выхода z к желаемому z^* выберем распространенный критерий квадрата разностей

$$\min_z\{(z - z^*)^2\}.$$

Подставим (3.1) и z^* в выражение критерия

$$\min_z\{(e^{-2au} - 1)^2\}$$

и найдем экстремум полученной функции

$$\frac{d}{du}\{(e^{-2au} - 1)^2\} = -4ae^{-2au}(e^{-2au} - 1) = 0.$$

Отсюда получаем $u_1 = +\infty$ и $u_2 = 0$.

Проверим достаточные условия

$$\frac{d^2}{du^2}\{(e^{-2au} - 1)^2\} = 8a^2e^{-2au}(2e^{-2au} - 1).$$

При $u_1 = +\infty$ $\dfrac{d^2}{du^2}\{(e^{-2au} - 1)^2\} = 0$, т. е. в данном случае мы получили особую точку, которую (при необходимости) можно исследовать хорошо описанными методами.

При $u_2 = 0$ $\dfrac{d^2}{du^2}\{(e^{-2au} - 1)^2\} = 8a^2 > 0$. Таким образом, при управлении $u = 0$ объект будет таким образом перерабатывать этот управляющий сигнал, что измеренный сигнал z будет приведен к желаемому $z^* = 1$.

Вновь отметим, что наша цель состоит в обсуждении основных понятий, различных методов. Различным методам присущи свои ограничения, которые не являются абсолютными. Во многих случаях они преодолимы. Действительно, написано множество книг о различных обобщениях и изменениях одного только дифференциального исчисления. А ведь есть еще и вариационное исчисление и т. д. и многие другие весьма и весьма интересные математические модели, укладывающиеся в класс задач детерминированного управления. И чтобы не уйти от цели изложения, адресуем читателя к соответствующим литературным источникам. Тем более, что к моменту изучения курса, связанного с моделированием сложных систем, вы в достаточной мере должны были освоить курс высшей математики.

3.1.2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Рассматривая задачу дифференциального исчисления, мы видим, что нам необходимо было решить уравнение для определения необходимых условий оптимальности. Но, к сожалению, не всегда возможно разрешить эти уравнения. Аналогичные трудности возникают и в других аналитических методах.

Для решения поставленной задачи детерминированного управления применяются численные методы, которые изучаются в курсе «Вычислительная математика» и ему подобным.

Основная идея численных методов состоит в задании начальных значений оптимизируемого сигнала, определении правил их изменения и задании условий окончания процесса изменения значений сигнала.

Проиллюстрируем сказанное на примере простейшего численного метода нахождения экстремума — метода дихотомии (половинного деления).

Пусть зависимость квадрата разности между измеренным выходом z и его желаемым значением z^* от управляющего сигнала представлена на рисунке 3.2. Зададим начальное управления u_0 и вычислим соответствующее ему значение оптимизируемой величины z_0'.

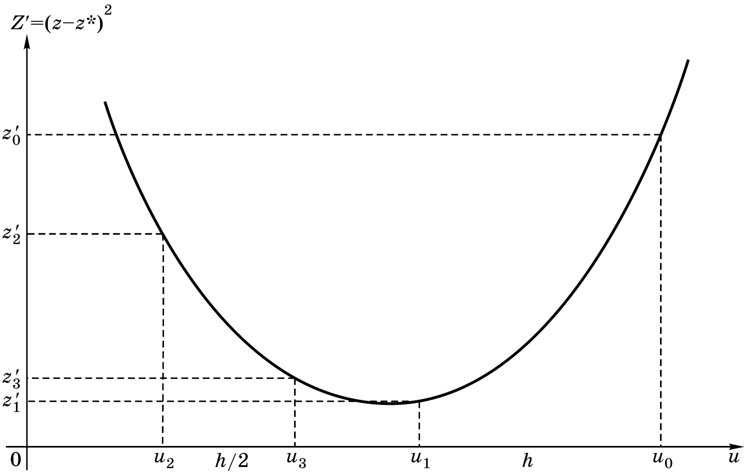

Рис. 3.2
Численные методы (метод дихотомии)

Условимся, что будем изменять управляющий сигнал u на шаг h. При этом, начнем изменение так, чтобы $z'_1 < z'_0$. Вновь изменяем u на шаг h. Получаем новое управление u_2 и соответствующее ему z'_2. Проверяем условие: $z'_2 < z'_1$.

Если это условие выполняется, то действуем аналогично. Если нет (как в нашем примере), то меняем знак шага на противоположный (меняем направление движение), а величину шага уменьшаем в два раза — $h/2$. Получим новое управление u_3 и соответствующее ему z'_3. И так действуем далее.

Для того чтобы прекратить процесс нахождения экстремума, необходимо задать для решаемой задачи величину расхождения между предыдущим и последующим значениями измеренного выхода z'.

Таким образом, задачи данного класса — детерминированного управления — могут решаться либо аналитическими методами, либо численными методами.

3.2.
ЗАДАЧА ОЦЕНКИ

Рассмотрим следующую задачу (рис. 3.3).

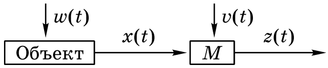

Рис. 3.3
Задача оценки

Здесь $w(t)$ и $v(t)$ — действующие на объект и измеритель помехи.

Известные динамические соотношения, описывающие работу объекта (зависимости между $w(t)$ и $x(t)$) и работу измерителя (зависимости между $x(t)$, $v(t)$ и $z(t)$). Помехи $w(t)$ и $v(t)$ заданы статистическими описаниями, методику составления которых будем рассматривать ниже. Сейчас же для определенности мы скажем, что это результат статистической обработки соответствующих сигналов, обеспечивающих исследователя по возможности полным представлением об их вероятностно-статистических свойствах.

В данной задаче (как и во всех последующих) четко проявляется необходимость выделения объекта и измерителя. Связано это с тем, что действие помех на измеритель может быть относительно просто описано. Измеритель — это ведь известный прибор, в отличие от объекта. Поэтому в измеренном сигнале появляется возможность более точного оценивания воздействия, влияния помех именно на объект. В результате наблюдений за объектом зафиксированы также измерения $z(t/T)$ в момент времени $t \leq T$.

Необходимо оценить наилучшую в некотором смысле оценку выходного сигнала объекта $x(t/T)$.

Еще раз подчеркнем, что при конкретизации задачи и задания конкретного критерия задача становится математически определенной.

Оценка выходного сигнала объекта может быть проведена в трех видах (рис. 3.4):

- когда выходной сигнал оценивается в момент времени окончания фиксации измерений $t = T$ (задача фильтрации);
- когда выходной сигнал оценивается в прошедшие моменты времени $t < T$ (задача интерполяции);

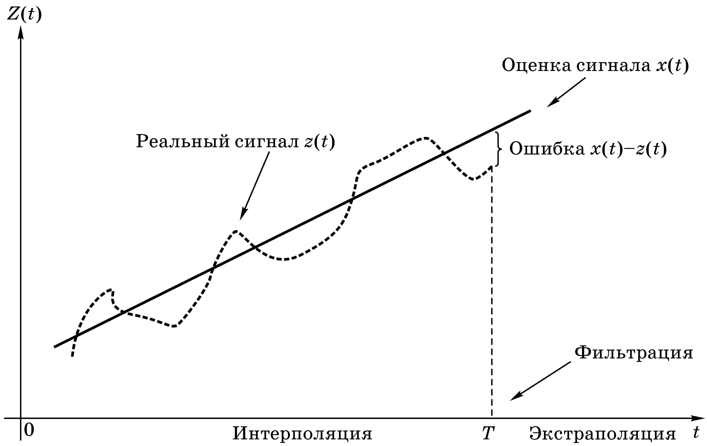

Рис. 3.4
Задачи фильтрации и прогнозирования

- когда выходной сигнал оценивается в будущие моменты времени $t > T$ (задача экстраполяции).

Последние две задачи в совокупности называют задачей прогнозирования (предсказания).

3.2.1. ФИЛЬТРАЦИЯ

В данном подпараграфе рассматривается одна из простейших математических схем, решающих задачу фильт- рации. Основная его теория хорошо известна. Поэто- му, здесь мы лишь рассмотрим основные идеи фильтра Винера и его связь с изучаемой и иными учебными дисциплинами.

Особое внимание следует обратить на формулировку критерия оценки и условия, накладываемые на имеющиеся в системе сигналы.

Рис. 3.5
Фильтр Винера

Схема системы оптимальной фильтрации приведена на рисунке 3.5.

Здесь x, y, z, v, $\tilde{x}$ — скаляры; $x(t)$ — желаемый сигнал; $\tilde{x}(t)$ — оценка сигнала,

$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$; $v(t)$ — помеха; $y(t)$ — оцениваемый сигнал; $z(t)$ — оцениваемый сигнал с помехой.

Все сигналы и шумы — стационарные случайные процессы с известными статистическими свойствами.

Устанавливается критерий оптимальности — минимум среднеквадратичной ошибки $\min\{\tilde{x}^2(t)\}$.

В задаче необходимо отыскать физически реализуемый фильтр, который преобразовывал бы выходной сигнал $z(t)$ так, чтобы минимизировался $M[\tilde{x}^2(t)]$.

Решение задачи. Обозначим $W_F(t)$ — весовую функцию фильтра F и $W_\alpha(t)$ — весовую функцию модели α. Из теории линейных систем известно

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_F(\tau) z(t-\tau) d\tau. \tag{3.2}$$

Исключительно для простоты положим $W_\alpha(t) = 1$ так, что $x(t) = y(t)$.

Вывод начнем с разложения погрешности фильтрации $\tilde{x}(t)$ и замены в ней слагаемых через соответствующие весовые функции

$$\tilde{x}(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$

и после усреднения (оценивания математического ожидания $M[\tilde{x}^2(t)]$)

$$\overline{\tilde{x}^2(t)} = \overline{\hat{x}^2(t)} - \overline{2\hat{x}(t)x(t)} + \overline{x^2(t)}. \tag{3.3}$$

Проводим преобразования первого слагаемого

$$\hat{x}(t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} W_F(\tau_1) z(t-\tau_1) d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} W_F(\tau_2) z(t-\tau_2) d\tau_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} W_F(\tau_1) \left(\int_{-\infty}^{\infty} W_F(\tau_2) z(t-\tau_1) z(t-\tau_2) d\tau_2 \right) d\tau_1$$

и, после усреднения

$$\begin{aligned} \overline{\hat{x}(t)^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} W_F(\tau_1) \left(\int_{-\infty}^{\infty} W_F(\tau_2) \overline{z(t-\tau_1) z(t-\tau_2)} d\tau_2 \right) d\tau_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W_F(\tau_1) \left(\int_{-\infty}^{\infty} W_F(\tau_2) \overline{\Phi_{zz}(\tau_1 - \tau_2)} d\tau_2 \right) d\tau_1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В (3.4) $\overline{\Phi_{zz}(\tau_1-\tau_2)}$ — корреляционная матрица, аргументом которой (в силу стационарности сигналов) является разность аргументов сомножителей корреляционных моментов $\overline{z(t-\tau_1)z(t-\tau_2)}$.

По аналогии второе и третье слагаемые имеют вид

$$\overline{\hat{x}(t)x(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}W_F(\tau_1)\overline{z(t-\tau_1)y(t)}d\tau_1=\int_{-\infty}^{\infty}W_F(\tau_1)\overline{\Phi_{yz}(\tau_1)}d\tau_1; \quad (3.5)$$

$$\overline{x^2(t)}=\overline{y^2(t)}. \quad (3.6)$$

И далее задача сводится к поиску такой весовой функции $W_F(t)$, которая минимизировала бы ошибку $\hat{x}(t)^2$.

Учитывая линейность фильтра, можно представить весовую функцию фильтра в виде двух слагаемых

$$W_F(t)=W_0(t)+\varepsilon\cdot W(t),$$

где $W_0(t)$ — искомая оптимальная весовая функция; $W(t)$ — весовая функция, преобразующая помехи; ε — коэффициент.

Тогда, очевидно, минимум необходимо отыскивать при условии $\varepsilon=0$ с тем, чтобы получить именно оптимальную весовую функцию.

Итак, необходимое условие минимума имеет вид

$$\left.\frac{\partial\overline{\tilde{x}^2}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0$$

или

$$\left.\frac{\partial\overline{\hat{x}^2(t)}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}-\left.\frac{\partial\overline{\hat{x}(t)x(t)}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0. \quad (3.7)$$

Используя (3.4), получаем

$$\left.\frac{\partial\overline{\hat{x}^2(t)}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(W_0(\tau_1)+\varepsilon W(\tau_1))d\tau_1\times\right.$$

$$\left.\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}(W_0(\tau_2)+\varepsilon W(\tau_2))\Phi_{zz}(\tau_1-\tau_2)d\tau_2\right]\right|_{\varepsilon=0}= \quad (3.8)$$

$$=2\int_{-\infty}^{\infty}W(\tau_1)\left[\int_{-\infty}^{\infty}W_0(\tau_2)\Phi_{zz}(\tau_1-\tau_2)d\tau_2\right]d\tau_1+\delta,$$

где δ — члены более высокого порядка.

И, используя (3.5), имеем

$$\left.\frac{\partial \overline{\hat{x}(t)x(t)}}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{-\infty}^{\infty} W(\tau_1)\Phi_{yz}(\tau_1)d\tau_1. \qquad (3.9)$$

Подставляем (3.8) и (3.9) в (3.7):

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(\tau_1)\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} W_0(\tau)\Phi_{zz}(\tau_1-\tau)d\tau\right)-\Phi_{yz}(\tau_1)\right]d\tau_1 = 0.$$

Так как $W(\tau)$, вообще говоря, произвольная функция, то необходимое условие минимума принимает вид

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} W_0(\tau)\Phi_{zz}(t-\tau)d\tau\right)-\Phi_{yz}(t)=0. \qquad (3.10)$$

Уравнение (3.10) называют уравнением Винера — Хопфа. В нем корреляционные матрицы Φ_{zz} и Φ_{yz} известны из условий задачи. Следует отыскать оптимальную весовую функцию $W_0(\tau)$, что, вообще говоря, и обеспечивает желаемую фильтрацию.

3.2.2. ЗАДАЧА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Проблемам прогнозирования, предсказания человек всегда уделял повышенное внимание. Мы не будем здесь рассматривать вопросы качественного прогнозирования. В литературе описано достаточно много различных количественных методов экстра- и интерполяции. Подробно и достаточно полно описаны условия их применения. Далее мы рассмотрим один такой метод. Его отличие от других состоит в том, что в некоторых весьма простых условиях его применимости он обладает максимально возможной точностью прогнозирования.

Метод этот называется именем академика Андрея Николаевича Колмогорова. Сам же автор обозначил его как метод экстраполяции и интерполяции случайных последовательностей.

Прогнозируемый случайный процесс $x(t)$ — это стационарный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием ($M_x = 0$), единичной дисперсией ($D_x = 1$) и ненулевой корреляцией $r_x(\tau)$. Эти достаточно просто выполняемые условия (за исключением корреляции) известны из теории вероятностей операции центрирования и нормирования. Если же прогнозу подвергается некоррелированный случайный процесс, то известно, что наиболее точным прогнозом является математическое ожидание.

Как таковое прогнозирование (ниже рассматривается задача экстраполяции) состоит в вычислении прогнозного значения посредством полинома

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=1}^{j=m} a_j x(t-j), \tag{3.11}$$

где a_j — прогнозируемые коэффициенты; m — длина предыстории.

Для работы с полиномом (3.11) необходимо воспользоваться m предыдущими значениями случайного процесса, которые носят название предыстории.

Теперь необходимо определить способ исчисления коэффициентов a_j. Их может быть много, но А. Н. Колмогоровым наилучшим в смысле достижения максимально возможной точности прогнозирования в случае среднеквадратического критерия оценки точности прогнозирования предложен и доказан следующий метод.

Коэффициенты a_j определяются посредством решения системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{j=m} a_j r(q-j) = r(q), \quad q = 1, 2, \ldots, m \tag{3.12}$$

или в более привычной форме

$$\begin{cases} a_1 r(0) + a_2 r(-1) + \ldots + a_m r(1-m) = r(1); \\ a_1 r(1) + a_2 r(0) + \ldots + a_m r(2-m) = r(2); \\ \ldots \\ a_1 r(m-1) + a_2 r(m-2) + \ldots + a_m r(0) = r(m). \end{cases}$$

В силу стационарности процесса $x(t)$ справедливо $r(\tau) = r(-\tau)$.

Качество прогнозирования оценивается среднеквадратичным критерием

$$\varepsilon^2 = M[(\hat{x}(t) - x(t))^2].$$

Не вызывает возражений и роль длины предыстории как параметра, управляющего точностью прогнозирования. С его увеличением повышается и точность предсказания.

Решение задачи интерполяции в принципе не отличается от выше изложенной экстраполяции. Разница лишь в том, что в качестве предыстории используются как предыдущие, так и последующие значения.

3.3. ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ

Настоящий класс математических моделей, так же как и оценивание сигналов, обеспечивает решение задач анализа в исследовании систем.

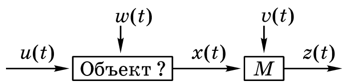

Рис. 3.6
Идентификация

Схема задачи представлена на рисунке 3.6.

Исследователю известны статистические описания шумов $w(t)$ и $v(t)$, динамическое соотношение, описывающее измеритель (между $x(t)$, $v(t)$ и $z(t)$), и зафиксированы наблюдения за управляющим сигналом $u(t)$ и измеренным выходом $z(t)$.

Необходимо определить наилучшую в некотором смысле оценку характеристики объекта (динамическое соотношение между $w(t)$, $u(t)$ и $x(t)$).

Существующая и достаточно сильно развитая теория идентификации обеспечивает не только успешное решение этого класса прикладных задач, но и дает возможность исследования дополнительных, важных свойств объекта, таких как идентифицируемость, управляемость и т. д.

С точки зрения многих прикладных задач проблема определения соотношения между величинами может быть решена и посредством регрессионного анализа.

Рассмотрим суть этого статистического метода.

Пусть в распоряжении исследователя есть N пар наблюдений (u_j, x_j), где u_j — входной сигнал (в нашем случае — управляющий) и x_j — выходной сигнал (выход объекта).

Кстати, отметим, что, зная измеренный выход $z(t)$ и соотношение, описывающее измеритель, мы по этому соотношению можем вычислить выход объекта $x(t)$.

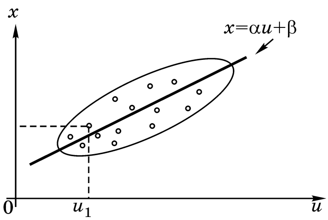

Рис. 3.7
Облако точек

Совокупность пар (u_j, x_j) образует так называемое облако точек (рис. 3.7). Визуальный анализ этого облака точек, или, что предпочтительнее, исходя из физического смысла объекта исследования, можно предположить, что наилучшим описанием зависимости между u_j (независимая переменная) и x_j (зависимая переменная) будет некоторая функция $x = f(u)$. Под наилучшим описанием может пониматься, например, минимум среднеквадратичной погрешности.

Если функция f линейная, то мы имеем дело с линейным регрессионным анализом, в противном случае — с нелинейным.

Пусть кривая регрессии представляет собой полином порядка n:

$$x = \sum_{j=1}^{j=n} a_j u^j.$$

Для того чтобы найти коэффициенты регрессии, воспользуемся так называемой системой нормальных уравнений, техника составлений которых весьма проста

$$\begin{cases} a_0 \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^0 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^1 + \ldots + a_n \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^n = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i u_i^0; \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^1 + a_1 \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^2 + \ldots + a_n \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^{n+1} = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i u_i^1; \\ \ldots \\ a_0 \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^n + a_1 \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^{n+1} + \ldots + a_n \sum\limits_{i=1}^{N} u_i^{2n} = \sum\limits_{i=1}^{N} x_i u_i^n. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений, мы найдем регрессионные коэффициенты a_j, $j = 0, 1, \ldots, n$.

В случае линейной регрессии $x = \alpha \cdot u + \beta$ коэффициент регрессии имеет вид

$$\alpha = \frac{S_x}{S_u}\overline{r_{xu}},$$

а свободный член

$$\beta = \bar{x} - \frac{S_x}{S_u}\overline{r_{xu}}\bar{u},$$

где $\bar{x}$, $\bar{u}$ — оценки средних зависимой и независимой переменных; S_x, S_u — среднеквадратические отклонения зависимой и независимой переменных; $\overline{r_{xu}}$ — оценка коэффициента корреляции между зависимой и независимой переменными.

Мы рассмотрели достаточно универсальный метод решения задачи полиномиального регрессионного анализа — системы нормальных уравнений. Он положен в основу большинства соответствующих программных средств. При этом следует отметить, что эти средства предоставляют пользователю не только числовые значения регрессионных коэффициентов, но и большой объем дополнительной информации — доверительные границы, уровни значимости, при которых принимаются гипотезы о значимости коэффициентов регрессии, и т. д.

Ясно, что практические задачи могут быть таковы, что уравнение регрессии не имеет вид полинома. В этом случае может быть использован прием линеаризации. Суть его состоит в сведении нелинейной регрессионной зависимости к линейной, нахождении для нее коэффициентов регрессии и реализации обратного перехода.

Пусть, для примера, из физических представлений об объекте исследователь считает, что облако точек достаточно точно должно описываться показательной зависимостью

$$x = a \cdot e^{-bu}.$$

Прологарифмируем обе части соотношения

$$\ln(x) = \ln(a) - b \cdot u$$

и введем новые обозначения

$$x' = a' - b \cdot u.$$

Далее известными способами найдем коэффициент регрессии b и свободный член a этой линейной регрессии. (При этом необходимо провести перерасчет зависимой переменной $x' = \ln(x)$.)

Затем производим пересчет свободного члена a по формуле

$$a = e^{a'}.$$

Конечно, операция линеаризации не всегда возможна. Как правило, она распространяется на показательные и обратные функции.

Теория вероятностей и математическая статистика — это те учебные дисциплины, которые создают основу для решения задачи идентификации посредством регрессионного анализа.

3.4. ЗАДАЧА СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

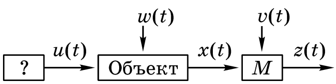

Рис. 3.8
Стохастическое управление

Схема задачи представлена на рисунке 3.8.

Здесь даны статистические описания помех $w(t)$ и $v(t)$, динамические соотношения, описывающие объект (зависимости между $u(t)$, $w(t)$ и $x(t)$) и измеритель (зависимости между $x(t)$, $v(t)$ и $z(t)$).

Необходимо найти такое управление $u(t)$, чтобы некоторая оценка выходного сигнала объекта $x(t)$ или измеренного сигнала $z(t)$ была бы как можно ближе к желаемым значениям $x^*(t)$ или $z^*(t)$.

Определение управления $u(t)$ в зависимости от $z(t)$ приводит к задаче стохастического управления.

Отличие данной задачи от задачи детерминированного управления состоит в одном — на объект и измеритель воздействуют помехи. Это в существенной мере усложняет задачу.

В самых общих чертах аналитические и численные методы решения как задачи детерминированного, так и стохастического управления весьма похожи. Соответствующая литература дает наглядное представление о том, насколько сложны эти методы при необходимости учета помех: следует учесть и законы распределения вероятностей, и корреляционные свойства случайных воздействий. Это приводит к существенному снижению и усложнению разнообразия как аналитических, так и численных методов решения задачи стохастического управления и, соответственно, сужает множество реально решаемых прикладных задач.

Подробности практики таковы, что требуется исследовать не просто сложные и очень сложные системы, а именно стохастические системы. И недостаточное развитие аналитических методов изучения приводит к необходимости использования специального инструментария. Он должен обеспечивать возможность соединения разнородных математических описаний и обязательно максимально учитывать стохастические составляющие системы. И такого рода инструментарий, носящий название имитационного моделирования, рассматривается нами далее.

3.5. ЗАДАЧА АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Схема задачи представлена на рисунке 3.9.

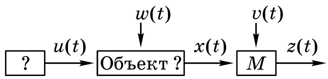

Рис. 3.9
Адаптивное управление

Исходные данные для этой задачи такие же, как и в задаче идентификации — статистические описания помех $w(t)$ и $v(t)$, динамическое соотношение, описывающее измеритель (соотношение между $x(t)$, $v(t)$ и $z(t)$) и зафиксированные управляющий сигнал $u(t)$ и измеренный выход $z(t)$.

Необходимо определить такое управление $u(t)$, и одновременно, такое динамическое соотношение, описывающее объект, для которого оценка выходного сигнала $x(t)$ была бы как можно ближе к желаемой.

Данная задача является наиболее сложной из всех ранее рассмотренных. Связано это с тем, что необходимо не только отыскать такое управление $u(t)$, чтобы выход объекта $x(t)$ или измеренный его выход $z(t)$ стремились к желаемым, но и соответствующим образом оценить сам объект, т. е. найти динамическое соотношение, описывающее взаимосвязь между $u(t)$, $w(t)$ и $x(t)$.

В рамках данной задачи рассматриваются три подзадачи: обучения, самообучения и адаптации.

В подзадаче обучения имеют место две системы — обучающая и обучаемая. Обучающая система формирует способ передачи информации, контролирует верность ее восприятия обучаемой системой и вводит корректирующее воздействие, направленное на достижения эффективного восприятия и переработки информации. В качестве примера можно сослаться на известный и понятный пример школьного либо вузовского образования.

Подзадача самообучения характерна тем, что обучаемая и обучающая системы представляют собой единое целое. Пример, когда самостоятельно изучают тот или иной вопрос, достаточно полно иллюстрирует самообучение. Вы сами определяете, по каким источникам, в какой последовательности и как изучать материал, сами контролируете его усвоение и сами вносите корректировки в процесс обучения.

Адаптация — это самообучение с возможностью изменения структуры самой системы — набора элементов и взаимосвязей между ними. В качестве примера приведем ящерицу, которая теряет свой хвост. Эта живая система после самооценки ситуации (самообучения) подключает ранее законсервированные элементы и связи, в результате чего регенерируется утраченный орган, и затем, по завершении этого действия, элементы и связи регенерации отключаются (адаптация).

В литературе, в частности в работах Я. З. Цыпкина вы найдете описания проблем построения и конкретные алгоритмы для систем с обучением, самообучением и адаптацией. Следует сказать, что сложность задачи обусловила ограниченность существующего набора методов и еще большую, практически близкую к нулю, ограниченность примеров систем с адаптацией.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Математическое моделирование.
2. Задача детерминированного управления. Аналитические методы.
3. Задача детерминированного управления. Численные методы.
4. Задача оценки.
5. Задача оценки. Фильтр Винера.
6. Задача оценки. Прогнозирование.
7. Задача идентификации.
8. Задача адаптивного управления.
9. Задача стохастического управления.